Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 176

Heft 4

Ausgegeben am 25. Januar 1937

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1937

Band 176. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Schmid, Hermann Ludwig, Relationen zwischen verallgemeinerten Gaußschen Summen	189
Eichler, Martin, Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren	192
Moufang, Ruth, Einige Untersuchungen über geordnete Schiefkörper	203
Neumer, Walter, Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. I.	224
Schmidt, Hermann, Über einige neuere Beispiele zur Wertverteilungslehre	250

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Relationen zwischen verallgemeinerten Gaußschen Summen.

Von *Hermann Ludwig Schmid* in Göttingen.

k sei ein Galoisfeld von $q = p^f$ Elementen. $\chi(x)$, $\psi(x)$ seien Charaktere der Ordnungen m, n der Multiplikativgruppe von k.

$$e(x) = \mathsf{Z}^{\mathfrak{S}(x)} \qquad (\mathsf{Z} = e^{\frac{2\pi i}{p}},\ \mathfrak{S} \text{ absolute Spur von } k)$$

sei ein Charakter der Ordnung p der Additivgruppe von k. Dann sind die verallgemeinerten Gaußschen Summen durch

$$\tau(\chi) = -\sum_{x \neq 0}{}' \chi(x)\, e(x)$$

definiert.

$k^{(r)}$ sei das höhere Galoisfeld von q^r Elementen. Durch

$$\chi_r(y) = \chi(N_r(y)) \qquad (y \text{ in } k^{(r)},\ N_r \text{ die Relativnorm für } k^{(r)}/k)$$

wird ein Charakter χ_r von $k^{(r)}$ definiert. Dann sei $\tau^r(\chi_r)$ die mit dem Charakter χ_r in $k^{(r)}$ gebildete verallgemeinerte Gaußsche Summe.

Davenport und Hasse haben folgende interessante formale Relationen zwischen verallgemeinerten Gaußschen Summen aufgestellt [1]):

$$\tau^r(\chi_r) = \tau(\chi)^r, \tag{1}$$

$$\psi(m^m) \prod_{\mu=0}^{m-1} \tau(\chi^\mu \psi) = \tau(\psi^m) \prod_{\mu=1}^{m-1} \tau(\chi^\mu). \tag{2}$$

In der genannten Arbeit werden dafür zwei Beweise gegeben, die trotz des elementaren Charakters dieser Relationen schwierige Hilfsmittel benutzen (Klassenkörpertheorie bzw. Prinzip der arithmetischen Charakterisierung).

Ich gebe hier einen elementaren Beweis der Relation (1) und spreche eine Vermutung aus, deren Bestätigung auch einen elementaren Beweis der Relation (2) liefern würde.

1. Wir beweisen (1) durch Induktion nach r. Sei (1) schon für r als richtig erkannt. Dann ist

$$\begin{aligned}\tau(\chi)^{r+1} &= \tau(\chi)^r \tau(\chi) = \tau^r(\chi_r)\, \tau(\chi) \\ &= \sum_{\substack{x \text{ in } k \\ y \text{ in } k^{(r)}}}{}' \chi(xN_r(y))\, e(x + S_r(y)) \qquad (S_r \text{ die Relativspur für } k^{(r)}/k) \\ &= \sum_{u \text{ in } k}{}' \chi(u) \sum_{v \bmod p} \mathsf{Z}^v M(u, v),\end{aligned}$$

[1]) H. Davenport und H. Hasse, Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen, Journ. f. Math. **172** (1934).

wo $M(u, v)$ die Anzahl der Lösungen (x, y) von

$$\mathfrak{S}(x + S_r(y)) = v \quad \text{mit} \quad xN_r(y) = u \qquad \begin{pmatrix} x \text{ in } k, & x \neq 0 \\ y \text{ in } k^{(r)}, & y \neq 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

bedeutet.

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \tau^{r+1}(\chi_{r+1}) &= -\sum_{z \text{ in } k^{(r)}}{}' \chi(N_{r+1}(z))\, e(S_{r+1}(z)) \\ &= -\sum_{u \text{ in } k}{}' \chi(u) \sum_{v \bmod p} \mathsf{Z}^v N(u, v)\,, \end{aligned}$$

wo $N(u, v)$ die Anzahl der Lösungen z von

$$\mathfrak{S}(S_{r+1}(z)) = v \quad \text{mit} \quad N_{r+1}(z) = u \qquad (z \text{ in } k^{(r+1)},\ z \neq 0) \tag{4}$$

bedeutet.

Daraus folgt

$$\tau(\chi)^{r+1} - \tau^{r+1}(\chi_{r+1}) = \sum_{u \text{ in } k}{}' \chi(u) \sum_{v \bmod p} \mathsf{Z}^v (M(u, v) + N(u, v))\,.$$

(1) wird auch für $r + 1$ richtig sein, wenn die Unabhängigkeit der Summe $M(u, v) + N(u, v)$ von u oder v gezeigt ist. Der folgende Beweis liefert zugleich ihre Unabhängigkeit von beiden u und v. (3) und (4) schreiben wir so:

$$f_u(y) = \sum_{i=0}^{f-1} \left(y + y^q + \cdots + y^{q^r-1} + \frac{u}{y^{1+q+\cdots+q^r-1}} \right)^{p^i} = v \tag{3a}$$

$$(y \text{ in } k^{(r)},\ y \neq 0),$$

$$f_u(z) = \sum_{i=0}^{f-1} \left(z + z^q + \cdots + z^{q^r-1} + \frac{u}{z^{1+q+\cdots+q^r-1}} \right)^{p^i} = v \quad \text{mit } N_{r+1}(z) = u \tag{4a}$$

$$(z \text{ in } k^{(r+1)},\ z \neq 0).$$

Das letztere folgt aus $u = N_{r+1}(z) = z^{1+q+\cdots+q^{r-1}+q^r}$, also

$$z^{q^r} = \frac{u}{z^{1+q+\cdots+q^{r-1}}}\,.$$

$M(u, v)$ ist die Anzahl der Lösungen y von (3a), $N(u, v)$ die Anzahl der Lösungen z von (4a). Die rationale Funktion $f_u(t)$ auf den linken Seiten von (3a) und (4a) wird durch Multiplikation mit dem Nenner $t^{p^{f-1}(1+q+\cdots+q^{r-1})}$ ein Polynom $F_u(t)$. Der Grad von $F_u(t)$ ist

$$g = \frac{q}{p}\left(q^{r-1} + (1 + q + \cdots + q^{r-1})\right).$$

Daraus folgt, daß für jedes Paar u, v die Anzahl der Lösungen von $f_u(t) = v$ im Körper $k^{(r(r+1))}$, der $k^{(r)}$ und $k^{(r+1)}$ als Unterkörper enthält, höchstens gleich g ist.

In $f_u(t)$ setzen wir nun die $q^r - 1$ Elemente $y \neq 0$ aus $k^{(r)}$ und die $\dfrac{q^{r+1} - 1}{q - 1}$ Elemente z aus $k^{(r+1)}$ mit $N_{r+1}(z) = u$ ein. Daraus folgt

$$\sum_{v \bmod p} (M(u, v) + N(u, v)) = q^r - 1 + \frac{q^{r+1} - 1}{q - 1}\,.$$

Der Mittelwert für ein festes u beträgt also

$$m = \frac{q}{p}\left(q^{r-1} + (1 + q + \cdots + q^{r-1})\right) = g\,.$$

Für den Fall, daß die in M und N gezählten Lösungen für ein festes u untereinander verschieden sind, folgt daraus $M(u, v) + N(u, v) = g$. Da $k^{(r)}$ und $k^{(r+1)}$ den Durchschnitt k haben, werden in M und N dann und nur dann gleiche Lösungen gezählt, wenn $u = w^{r+1}$ mit w aus k ist. Diese Lösungen w sind beim obigen Einsetzungsprozeß doppelt gezählt worden. Dafür treten diese Lösungen in $f_u(t) = v$ aber gerade als zweifache Wurzeln auf. Denn es ist

$$\frac{d}{dt}\left(f_u(t) - v\right) = 1 - \frac{u}{t^{2+q+\cdots+q^{r-1}}},$$

also $\frac{d}{dt}\left(f_u(t) - v\right) = 0$ für $t = w$ und $u = w^{r+1}$. Also ist auch in diesem Falle $M(u, v) + N(u, v) = g$, womit der Induktionsbeweis erbracht ist.

2. Die beiden Seiten der Relation (2) schreiben wir so:

$$\begin{aligned}\psi(m^m) \prod_{\mu=0}^{m-1} \tau(\chi^\mu \psi) &= (-1)^m \sum_{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}}{}' e(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1})\, \psi(m^m x_0 x_1 \cdots x_{m-1})\, \chi(x_1 x_2^2 \cdots x_{m-1}^{m-1}) \\ &= (-1)^m \sum_{u \text{ in } k}{}' \psi(u) \sum_{v \bmod p} \mathsf{Z}^v A(u, v),\end{aligned}$$

wo

$$A(u, v) = \sum_{\substack{m^m x_0 x_1 \cdots x_{m-1} = u \\ \mathfrak{S}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) = v}}{}' \chi(x_1 x_2^2 \cdots x_{m-1}^{m-1}) \qquad \begin{pmatrix} x_i \text{ in } k, & x_i \neq 0 \\ i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\tau(\psi^m) \prod_{\mu=1}^{m-1} \tau(\chi^m) &= (-1)^m \sum_{y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}}{}' e(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1})\, \psi(y_0^m)\, \chi(y_1 y_2^2 \cdots y_{m-1}^{m-1}) \\ &= (-1)^m \sum_{u \text{ in } k}{}' \psi(u) \sum_{v \bmod p} \mathsf{Z}^v B(u, v),\end{aligned}$$

wo

$$B(u, v) = \sum_{\substack{y_0^m = u \\ \mathfrak{S}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) = v}}{}' \chi(y_1 y_2^2 \cdots y_{m-1}^{m-1}) \qquad \begin{pmatrix} y_i \text{ in } k, & y_i \neq 0 \\ i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix}.$$

Es liegt nun die Vermutung nahe, daß

$$A(u, v) = B(u, v). \tag{5}$$

Dies ist lediglich eine Behauptung über den Charakter χ. Aus (5) würde sofort die Richtigkeit von (2) folgen.

Für $\chi(u) \neq 1$ können wir (5) sofort bestätigen. Denn dann ist einerseits $B(u, v) = 0$, andererseits $\chi(u) A(u, v) = A(u, v)$, d. h. $A(u, v) = 0$.

(5) braucht also nur noch für u mit $\chi(u) = 1$ bewiesen zu werden. Für $m = 2$ ist die Gültigkeit von (5) leicht einzusehen.

Eingegangen 7. Februar 1936.

Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren.

Von *Martin Eichler* in Halle.

1. Die neuere Entwicklung in der Algebrentheorie hat gezeigt, daß sich diese Theorie von der der Zahlkörper durch viel größere Einfachheit auszeichnet. Eine besonders schwierige Aufgabe ist es bekanntlich, die Idealklassenzahl eines Zahlkörpers zu berechnen, und diese darf keineswegs als allgemein gelöst betrachtet werden. Die Frage nach der Idealklassenzahl im Hyperkomplexen wird wiederum i. a. durch sehr einfache Sätze beantwortet, die im folgenden bewiesen werden sollen.

Satz 1. *Es bezeichne* $\mathfrak{A}$ *eine normale einfache Algebra vom Grad* n *über dem algebraischen Zahlkörper* K *und* $\mathfrak{u}$ *das Produkt aller unendlichen Primstellen von* K, *an denen* $\mathfrak{A}$ *verzweigt ist. Ist* $n > 2$ *oder umfaßt* $\mathfrak{u}$ *nicht alle unendlichen Primstellen von* K, *so sind die und nur die Ideale von* $\mathfrak{A}$ *Hauptideale, deren Normen* [1]) *zum Strahl* mod $\mathfrak{u}$ *gehören.*

Dieser Satz sagt einzig über Quaternionenalgebren über einem totalreellen algebraischen Zahlkörper nichts aus, welche totalpositive Normenformen haben. Solche Quaternionenalgebren sind andererseits dadurch unter allen normalen einfachen Algebren ausgezeichnet, daß sich sämtliche Einheiten jeder ihrer Ordnungen als Produkte von endlich vielen mit Zentrumseinheiten darstellen lassen; dies läßt sich mühelos aus dem Dirichletschen Einheitensatze folgern. Es ist zu erwarten, daß sich hier die Idealklassenzahl so wenigstens größenordnungsmäßig auf analytischem Wege bestimmen läßt, wie es für rationales Zentrum möglich ist [2]).

Der Satz 1 ist mit folgendem gleichbedeutend:

Satz 2. *Ist* $n > 2$ *oder umfaßt* $\mathfrak{u}$ *nicht alle unendlichen Primstellen von* K, *so ist die Idealklassenzahl in* $\mathfrak{A}$ *gleich der Strahlklassenzahl* mod $\mathfrak{u}$ *in* K.

Wenn $\mathfrak{A}$ eine Matrixalgebra ist, so sind die behaupteten Sätze schon bekannt und in der Dissertation von Herrn Schilling bewiesen worden [3]). Für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ eine indefinite Quaternionenalgebra über dem rationalen Zahlkörper ist, machte mich Herr Brandt auf ihre Gültigkeit aufmerksam. Einen Beweis könnte man hier auf den Satz von A. Mayer stützen, daß i. a. zwei indefinite ternäre quadratische Formen desselben Geschlechts mit rationalen Koeffizienten äquivalent sind [4]). Einen Hinweis auf die

[1]) Die Normen $n(\mu)$, $n\mathfrak{M}$ von Zahlen μ und Idealen $\mathfrak{M}$ sind stets in reduziertem Sinne zu verstehen.

[2]) H. Brandt, Idealtheorie in Quaternionenalgebren, Math. Ann. **99** (1928), S. 1, § 67.
K. Hey, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen, Diss. Hamburg 1929.

[3]) O. Schilling, Über gewisse Beziehungen zwischen der Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme und algebraischer Zahlkörper, Math. Ann. **111** (1935), S. 372, § 3.

[4]) Vgl. L. E. Dickson, Studies in the theory of Numbers, Chicago 1930; dort finden sich weitere Literaturangaben.

Zusatz bei der Korrektur: Zu meinem Satz 1 vgl. auch C. G. Latimer, On ideals in generalized quaternion algebras, Transactions Amer. Math. Soc. **38** (1935), p. 436, und J. H. Teller, A class of quaternion algebras, Duke Mathematical Journal **2** (1936), p. 280.

Gültigkeit dieser Sätze stellt auch das Ergebnis dar, daß fast jede an allen unendlichen Verzweigungsprimstellen einer normalen Divisionsalgebra $\mathfrak{A}$ positive Zahl Norm einer Zahl aus $\mathfrak{A}$ ist [5]).

Wie in den beiden genannten Spezialfällen gelingt der Beweis unter den allgemeinsten Bedingungen im wesentlichen auf arithmetischem Wege. Analytische Sätze spielen eine untergeordnete Rolle, man braucht von solchen nur den Satz von der arithmetischen Progression und den hiermit verwandten Dichtigkeitssatz von Tschebotarew. Herrn C. Chevalley verdanke ich wesentliche Vereinfachungen meines Beweises und ebenso den Hinweis darauf, daß die behaupteten Sätze in der Regel auch für $n = 2$ gültig bleiben; mir war diese Tatsache ursprünglich nur in dem Spezialfalle $\mathfrak{u} = (1)$ bekannt.

2. Einige Hilfssätze werden vorausgeschickt.

Hilfssatz **1.** *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* K *und* $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ *die* $\mathfrak{p}$*-adische Erweiterung von* K. $f(x)$ *sei ein irreduzibles Polynom in* $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$. *Dann existiert ein Exponent* h *derart, daß jedes Polynom* $g(x)$ *mit Koeffizienten aus* K, *welches der Kongruenz*

$$g(x) \equiv f(x) \pmod{\mathfrak{p}^h}$$

genügt, ebenfalls in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ *irreduzibel ist.*

Beweis. Ist $f(x)$ in dem Ring der Restklassen der ganzen Größen von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ mod $\mathfrak{p}^h$ irreduzibel oder, kurz gesagt: ist $f(x)$ mod $\mathfrak{p}^h$ irreduzibel, so gilt dasselbe für $g(x)$, und $g(x)$ ist auch in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ irreduzibel. Es braucht somit nur ein Exponent h gefunden zu werden, für welchen $f(x)$ mod $\mathfrak{p}^h$ irreduzibel ist.

Wäre für jedes h

$$f(x) \equiv p_h(x) q_h(x) \pmod{\mathfrak{p}^h},$$

so gälte auch

$$f(x) \equiv p_h(x) q_h(x) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

$f(x)$ kann mod $\mathfrak{p}$ aber nur auf endlich viele Arten zerlegt werden, und daher wird es zwei Polynome $p^{(1)}(x)$, $q^{(1)}(x)$ derart geben, daß für eine unendliche Menge H_1 von Exponenten h

$$p_h(x) \equiv p^{(1)}(x) \pmod{\mathfrak{p}}, \qquad q_h(x) \equiv q^{(1)}(x) \pmod{\mathfrak{p}}$$

gilt. Es werde als bewiesen angenommen, daß es zwei Folgen von Polynomen $p^{(i)}(x)$, $q^{(i)}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ so gibt, daß für jeden Exponenten h aus einer unendlichen Teilmenge H_i von H_1

$$p_h(x) \equiv p^{(i)}(x) \pmod{\mathfrak{p}^i}, \qquad q_h(x) \equiv q^{(i)}(x) \pmod{\mathfrak{p}^i}$$

und ferner

$$p^{(i)}(x) \equiv p^{(i-1)}(x) \pmod{\mathfrak{p}^{i-1}}, \qquad q^{(i)}(x) \equiv q^{(i-1)}(x) \pmod{\mathfrak{p}^{i-1}}$$

gilt.

$f(x)$ kann nun auch mod $\mathfrak{p}^{t+1}$ nur auf endlich viele Arten zerlegt werden, daher wird es in den Restklassen von $p^{(t)}(x)$ und $q^{(t)}(x)$ mod $\mathfrak{p}^t$ zwei Polynome $p^{(t+1)}(x)$ und $q^{(t+1)}(x)$ so geben, daß für eine unendliche Teilmenge H_{t+1} von H_t

$$p_h(x) \equiv p^{(t+1)}(x) \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}, \qquad q_h(x) \equiv q^{(t+1)}(x) \pmod{\mathfrak{p}^{t+1}}$$

gilt. Die Folgen $p^{(i)}(x)$, $q^{(i)}(x)$ konvergieren $\mathfrak{p}$-adisch gegen zwei Grenzfunktionen $p(x)$, $q(x)$, und es wird

$$f(x) = p(x)\, q(x),$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

[5]) H. Hasse und O. Schilling, Die Normen aus einer normalen Divisionsalgebra über einem algebraischen Zahlkörper, dieses Journ. **174** (1935), S. 248.

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{J}$ eine Maximalordnung einer normalen einfachen Algebra $\mathfrak{A}$ vom Grad n über K und $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus K. $\alpha_\mathfrak{p}$ sei eine Zahl aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})$ eine Erweiterung n-ten Grades von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ ist. Dann gibt es einen solchen Exponenten h, daß für jede Zahl α aus $\mathfrak{J}$, die der Kongruenz*

$$\alpha \equiv \alpha_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{p}^h \mathfrak{J}_\mathfrak{p}}$$

genügt, auch $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\alpha)$ eine Erweiterung n-ten Grades von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ ist.

Beweis. Ist

$$\alpha \equiv \alpha_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{p}^h \mathfrak{J}_\mathfrak{p}},$$

so sind die Hauptgleichungen von $\alpha_\mathfrak{p}$ und α mod $\mathfrak{p}^h$ kongruent. Die Hauptgleichung von $\alpha_\mathfrak{p}$ ist nach Voraussetzung in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ irreduzibel. Wird jetzt h nach Hilfssatz 1 so groß gewählt, daß auch die Hauptgleichung von α in $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ irreduzibel ist, so ist $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\alpha)$ eine Erweiterung n-ten Grades von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$.

Im folgenden werden jetzt kommutative Systeme $\mathsf{K}(\xi)$ betrachtet, die durch Zahlen ξ aus einer Maximalordnung $\mathfrak{J}$ und deren Potenzen über K erzeugt werden. Dann und nur dann, wenn $\mathsf{K}(\xi)$ halbeinfach ist, läßt sich von der Ordnung aller ganzen Größen von $\mathsf{K}(\xi)$ in sinnvoller Weise reden; diese Ordnung sei mit $\mathfrak{R}(\xi)$ bezeichnet. $\mathfrak{F}_\xi$ bedeute den Führer der Ordnung $\mathfrak{R}(\xi) \frown \mathfrak{J}$ bezüglich $\mathfrak{R}(\xi)$, d. h. es sei in Dedekindscher Schreibweise

$$\mathfrak{F}_\xi = \frac{\mathfrak{R}(\xi) \frown \mathfrak{J}}{\mathfrak{R}(\xi)}.$$

Besitzt $\mathsf{K}(\xi)$ ein von 0 verschiedenes Radikal, so werde symbolisch

$$\mathfrak{F}_\xi = 0$$

geschrieben. Wenn ξ ganz und $\mathfrak{F}_\xi = (1)$ ist, so bedeutet das, daß ξ in $\mathfrak{J}$ enthalten und $\mathsf{K}(\xi)$ halbeinfach ist. Die Bezogenheit von $\mathfrak{F}_\xi$ auf $\mathfrak{J}$ braucht nicht zum Ausdruck gebracht zu werden, ohne daß Mißverständnisse zu befürchten sind. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K, $\xi_\mathfrak{p}$ eine Zahl aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, so wird an Stelle von $\mathfrak{R}(\xi)$, $\mathfrak{J}_\xi$ jetzt $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\xi_\mathfrak{p})$, $\mathfrak{F}_{\xi_\mathfrak{p},\mathfrak{p}}$ zu schreiben sein, wobei diese Ausdrücke natürlich von den $\mathfrak{p}$-Komponenten von $\mathfrak{R}(\xi)$ und $\mathfrak{F}_\xi$ zu unterscheiden sind.

Hilfssatz 3. *Ist $\alpha_\mathfrak{p}$ eine Zahl aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, für die $\mathfrak{F}_{\alpha_\mathfrak{p},\mathfrak{p}} = (1)$ ist, so gibt es einen Exponenten r derart, daß für jede der Kongruenz*

$$\alpha \equiv \alpha_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{p}^r \mathfrak{J}_\mathfrak{p}}$$

genügende Zahl α aus $\mathfrak{J}$ auch $\mathfrak{F}_{\alpha,\mathfrak{p}} = (1)$ ist.

Beweis. Ist $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ eine Basis von $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})$ in bezug auf $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$, so besteht ein System linearer Gleichungen

$$\alpha_\mathfrak{p}^k = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ik} \varrho_i \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

mit ganzen a_{ik} aus $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$. Die Determinante $|a_{ik}|$ ist von 0 verschieden, sie möge $\mathfrak{p}$ gerade in der Potenz $\mathfrak{p}^{r_1}$ enthalten. Ist jetzt

$$\alpha \equiv \alpha_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{p}^{r_1+1} \mathfrak{J}_\mathfrak{p}},$$

so sind die Ordnungen $[1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}]$ und $[1, \alpha_\mathfrak{p}, \ldots, \alpha_\mathfrak{p}^{n-1}]$ mod $\mathfrak{p}^{r_1+1}$ isomorph, und daher geht erstere durch die lineare Substitution $(a_{ik})^{-1}$ in eine Ordnung $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\alpha)$ über, welche in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ enthalten ist und welche der Ordnung $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})$ mod $\mathfrak{p}$ isomorph ist. Nun läßt sich $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})$ nicht zu einer größeren Ordnung erweitern, und dasselbe gilt dann auch

für $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\alpha)$. Es ist also $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\alpha)$ maximal und deshalb die $\mathfrak{p}$-Komponente von $\mathfrak{F}_\alpha$ gleich (1). Man sieht somit, daß der Exponent $r = r_1 + 1$ die erforderliche Eigenschaft besitzt.

Hilfssatz 4 [6]). *Es sei* Z *ein Relativkörper endlichen Grades über* K *und* $\mathfrak{a}$ *ein ganzes Ideal in* K. *Für jeden Primteiler* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{a}$ *sei in* $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ *eine Zahl* $\alpha_\mathfrak{p}$ *gegeben, die entweder Einheit ist oder für welche* $\mathfrak{F}_{\alpha_\mathfrak{p},\mathfrak{p}} = (1)$ *gilt. Dann gibt es in* $\mathfrak{J}$ *eine Zahl* α, *die erstens für alle diese* $\mathfrak{p}$ *den Kongruenzen*

$$\alpha \equiv \alpha_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}$$

genügt, für die zweitens α *zu* $\mathfrak{F}_\alpha$ *teilerfremd und drittens* $\mathsf{K}(\alpha)$ *eine Erweiterung n-ten Grades von* K *mit* $\mathsf{K}(\alpha) \cap \mathsf{Z} = \mathsf{K}$ *ist.*

Beweis. Es sei zunächst $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes und in Z völlig zerlegtes Primideal von K und $\alpha_\mathfrak{q}$ eine solche Zahl aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$, daß $\mathsf{K}_\mathfrak{q}(\alpha_\mathfrak{q})$ eine Erweiterung n-ten Grades von $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$ ist. Dann sei α_1 eine Zahl aus $\mathfrak{J}$, welche die Kongruenzen

$$\alpha_1 \equiv \alpha_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^{r_\mathfrak{p}}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}, \qquad \alpha_1 \equiv \alpha_\mathfrak{q} \pmod{\mathfrak{q}^h\mathfrak{J}_\mathfrak{q}}$$

befriedigt, wobei h und die $r_\mathfrak{p}$ die nach den Hilfssätzen 2 und 3 existierenden Exponenten sind, so daß erstens $\mathsf{K}_\mathfrak{q}(\alpha_1)$ eine Erweiterung n-ten Grades von $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$ ist und zweitens $\mathfrak{F}_{\alpha_1,\mathfrak{p}} = (1)$ gilt, falls $\mathfrak{F}_{\alpha_\mathfrak{p},\mathfrak{p}} = (1)$ ist. $\mathsf{K}(\alpha_1)$ ist dann auch eine Erweiterung n-ten Grades von K, und weil $\mathfrak{q}$ in Z völlig zerlegt, dagegen in $\mathsf{K}(\alpha_1)$ höchstens in gleiche Primfaktoren zerspalten wird (denn sonst könnte $\mathsf{K}_\mathfrak{q}(\alpha_1)$ nicht eine Erweiterung n-ten Grades von $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$ sein), so haben $\mathsf{K}(\alpha_1)$ und Z außer den Zahlen von K keine weiteren gemeinsam.

Jetzt zerlegen wir den Führer $\mathfrak{F}_{\alpha_1}$ von $\mathfrak{R}(\alpha_1) \cap \mathfrak{J}$ in ein Produkt

$$\mathfrak{F}_{\alpha_1} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2,$$

wobei alle Primteiler von $\mathfrak{F}_1$ in $\mathfrak{a}$ aufgehen, dagegen $\mathfrak{F}_2$ zu $\mathfrak{a}$ teilerfremd ist. Weiterhin seien f_1, f_2 zwei Zahlen aus K, deren erste in $\mathfrak{a}n\mathfrak{F}_1$, und deren zweite in $n\mathfrak{F}_2$ enthalten ist, und für die

$$f_1 + f_2 = 1$$

gilt. Wird nun

$$\alpha = \alpha_1 f_2 + f_1$$

gesetzt, so ist α die Zahl, deren Existenz zu zeigen ist: Es ist nämlich erstens für alle $\mathfrak{p}$, die $\mathfrak{a}$ teilen,

$$\alpha \equiv \alpha_1 \equiv \alpha_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}.$$

Zweitens ist $\mathsf{K}(\alpha) = \mathsf{K}(\alpha_1)$, also auch $\mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{F}_{\alpha_1}$. Ein etwa vorhandener gemeinsamer Primteiler $\mathfrak{P}$ von α und $\mathfrak{F}_\alpha$ könnte offenbar nicht in $\mathfrak{F}_2$ aufgehen. Ginge $\mathfrak{P}$ aber in $\mathfrak{F}_1$ auf, so auch in $\mathfrak{a}$; und bezeichnet $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal von K, so könnte wegen

$$\alpha = \alpha_1 f_2 + f_1 \equiv \alpha_1 \equiv \alpha_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}$$

$\alpha_\mathfrak{p}$ keine Einheit sein. Dann wäre aber voraussetzungsgemäß $\mathfrak{F}_{\alpha_\mathfrak{p},\mathfrak{p}} = (1)$, und, wie schon oben für diesen Fall festgestellt wurde, $\mathfrak{F}_{\alpha,\mathfrak{p}} = \mathfrak{F}_{\alpha_1,\mathfrak{p}} = (1)$. Folglich können α und $\mathfrak{F}_\alpha$ keinen gemeinsamen Primteiler besitzen. Drittens ist

$$\mathsf{K}(\alpha) \cap \mathsf{Z} = \mathsf{K}(\alpha_1) \cap \mathsf{Z} = \mathsf{K},$$

und damit ist der Hilfssatz 4 bewiesen.

---

[6]) Auf diesen Hilfssatz und seine Eignung zum Beweise des behaupteten Klassenzahltheorems hat mich Herr Chevalley hingewiesen.

Hilfssatz 5. *Ist $\mathfrak{M}$ ein ganzes Ideal der Linksordnung $\mathfrak{J}$, das zur Diskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{J}$ teilerfremd ist, so kann man für jeden Primteiler $\mathfrak{p}$ von $n\mathfrak{M}$ ein Element $\mu_\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ derart finden, daß erstens*

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{J}\mu_\mathfrak{p},$$

zweitens $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\mu_\mathfrak{p})$ direkte Summe von n einfachen Systemen und drittens $\mathfrak{F}_{\mu_\mathfrak{p},\mathfrak{p}} = (1)$ ist.

Beweis. Unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{p}$ die Diskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{J}$ nicht teilt, kann man $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ bekanntlich als die Ordnung aller n-reihigen Matrizen mit ganzen Koeffizienten aus $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ darstellen. Alle Ideale sind Hauptideale, es ist also

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}\mu,$$

wobei μ eine Matrix aus $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ ist. Jetzt gibt es zwei Einheiten ε, η in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ derart [7]), daß

$$\eta\mu\varepsilon = \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist, wobei alle m_i voneinander verschieden sind, und dann gilt

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p}\varepsilon = \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}\varepsilon \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \varepsilon^{-1}.$$

Wird

$$\mu_\mathfrak{p} = \varepsilon \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \varepsilon^{-1}, \quad \nu = \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$

gesetzt, so sind $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\mu_\mathfrak{p})$ und $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\nu)$ isomorph. Letzteres System ist die direkte Summe von n einfachen Systemen, dasselbe gilt daher auch für $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\mu_\mathfrak{p})$. Nun ist $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\nu)$ in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ enthalten, und weil ε Einheit ist, ist auch

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\mu_\mathfrak{p}) = \varepsilon\mathfrak{R}_\mathfrak{p}(\nu)\varepsilon^{-1}$$

in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ enthalten. Daher ist $\mathfrak{F}_{\mu_\mathfrak{p},\mathfrak{p}} = (1)$, was zu beweisen war.

Hilfssatz 6. *Es sei $\mathfrak{p} = (p)$ ein Hauptprimideal von K, welches die Diskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{J}$ nicht teilt. Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ zwei ganze Ideale der Linksordnung $\mathfrak{J}$ und derselben Norm*

$$n\mathfrak{P} = n\mathfrak{P}' = \mathfrak{p},$$

so gibt es in $\mathfrak{J}$ eine solche Zahl τ, daß

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \tau^{-1}\mathfrak{P}'_\mathfrak{p}\tau$$

und p modulo jeder Potenz von $(n(\tau))$ ein n-ter Potenzrest ist.

Beweis. Es sei nach Hilfssatz 5

$$\mathfrak{P}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}\pi'_\mathfrak{p},$$

wobei $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\pi'_\mathfrak{p})$ direkte Summe von n einfachen Systemen ist. Bekanntlich gibt es eine Einheit ε in $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, für welche

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \varepsilon^{-1}\mathfrak{P}'_\mathfrak{p}\varepsilon$$

---

[7]) Vgl. hierzu H. Hasse, Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), S. 495, besonders S. 524.

gilt [7]). $n(\varepsilon)$ ist eine Einheit von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ und daher die Norm einer Einheit ϑ von $\mathsf{K}_\mathfrak{p}(\pi'_\mathfrak{p})$; dann ist $n(\vartheta^{-1}\varepsilon) = 1$ und

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{p} = (\vartheta^{-1}\varepsilon)^{-1}\mathfrak{P}'_\mathfrak{p}(\vartheta^{-1}\varepsilon).$$

Es macht deshalb nichts aus, wenn gleich von vornherein $n(\varepsilon) = 1$ angenommen wird.

Jetzt bezeichne Z den kleinsten relativgaloisschen durch $\sqrt[n]{p}$ über K erzeugten Zahlkörper und $\mathfrak{h}$ den Führer des größten relativabelschen Unterkörpers Z' von Z. Ferner durchlaufe $\mathfrak{r}$ alle von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{h}$. Dann existiert nach Hilfssatz 4 eine den Kongruenzen

$$\sigma \equiv \varepsilon \pmod{\mathfrak{p}\mathfrak{h}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}, \qquad \sigma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{h}_\mathfrak{r}\mathfrak{J}_\mathfrak{r}}$$

genügende Zahl σ in $\mathfrak{J}$ mit den Eigenschaften

$$(\mathsf{K}(\sigma) : \mathsf{K}) = n, \qquad \mathsf{K}(\sigma) \frown \mathsf{Z} = \mathsf{K}, \qquad (\sigma, \mathfrak{F}_\sigma) = (1).$$

Es ist wegen $n(\varepsilon) = 1$

$$n(\sigma) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{h}},$$

daher gehört $(n(\sigma))$ zu der Idealgruppe, für die Z' Klassenkörper ist, und wegen $\mathsf{K}(\sigma) \frown \mathsf{Z} = \mathsf{K}$ gehört (σ) zu der Idealgruppe von $\mathsf{K}(\sigma)$, für welche $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ Klassenkörper ist. Wir betrachten nun die Strahlklassen in $\mathsf{K}(\sigma)$ mod $\mathfrak{F}_\sigma\mathfrak{h}\mathfrak{p}$: Es sei Γ der Strahlklassenkörper zu diesem Führer, er umfaßt $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$, und Γ ist Klassenkörper zu einer Idealgruppe H in $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$, die mod $\mathfrak{F}_\sigma\mathfrak{h}\mathfrak{p}$ erklärbar ist. Jetzt ist

$$\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z} \frown \Gamma = \mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}',$$

daher ist die Gruppe von $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}\Gamma/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ gleich dem direkten Produkt der Gruppen von $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ und $\Gamma/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$. Bezeichnet K irgendeine Idealklasse von $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ mod H und $\varkappa$ die im Sinne der Klassenkörpertheorie zu K gehörige Substitution der galoisschen Gruppe von $\Gamma/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$, so gibt es nach dem Existenzsatze von Tschebotarew unendlich viele Primideale ersten Grades, deren Artinsymbol für die Gruppe von $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}\Gamma/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ gleich der durch $\varkappa$ erzeugten Klasse $\langle\varkappa\rangle$ ausfällt. Weil die Gruppe von $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}\Gamma/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ gleich dem direkten Produkt der Gruppen von $\Gamma/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ und $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ ist, müssen diese Primideale in der Klasse K enthalten sein und in $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ völlig zerlegt werden.

Es sei jetzt (σ') ein Primideal aus $\mathsf{K}(\sigma)$, das der Kongruenz

$$\sigma' \equiv \sigma \pmod{\mathfrak{F}_\sigma\mathfrak{h}\mathfrak{p}}$$

genügt. Es ist zu $\mathfrak{h}$ prim und gehört wie (σ) zu der Idealgruppe, für die $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ Klassenkörper ist, deshalb wird (σ') in $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'/\mathsf{K}(\sigma)$ völlig zerlegt. $\mathfrak{S}$ sei ein Primteiler von (σ') in $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$. Dann gibt es nach dem oben Bemerkten ein Primideal $\mathfrak{T}$ ersten Grades, das derselben Idealklasse mod H wie $\mathfrak{S}$ angehört, und das in $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}/\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}'$ völlig zerlegt wird. Die Norm von $\mathfrak{T}$ in Bezug auf $\mathsf{K}(\sigma)$ gehört zu derselben Strahlklasse mod $\mathfrak{F}_\sigma\mathfrak{h}\mathfrak{p}$ wie die von $\mathfrak{S}$, sie ergibt also ein Hauptideal (τ) mit $\tau \equiv \sigma' \equiv \sigma \pmod{\mathfrak{F}_\mathfrak{p}\mathfrak{h}\mathfrak{p}}$. Da $\mathfrak{T}$ Primideal ersten Grades sein sollte, so sind auch (τ) bzw. $(n(\tau))$ Primideale ersten Grades in $\mathsf{K}(\sigma)$ bzw. K, und weil (τ) in $\mathsf{K}(\sigma)\mathsf{Z}/\mathsf{K}(\sigma)$ völlig zerlegt wird, wird auch $(n(\tau))$ in Z/K völlig zerlegt, und dann ist p mod $(n(\tau))$ ein n-ter Potenzrest. Wird nun $\mathfrak{T}$ und damit auch $(n(\tau))$ zu p und n prim angenommen, was nach Obigem die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, so ist p auch modulo jeder Potenz von $(n(\tau))$ ein n-ter Potenzrest.

Andererseits ist $\mathsf{K}(\tau) = \mathsf{K}(\sigma)$, also $\mathfrak{R}(\tau) = \mathfrak{R}(\sigma)$ und $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_\sigma$, und es gilt

$$\tau \equiv \sigma \pmod{\mathfrak{F}_\tau};$$

τ ist daher, ebenso wie σ, in $\mathfrak{R}(\tau) \frown \mathfrak{J}$, also in $\mathfrak{J}$ enthalten. Weiterhin gilt

$$\tau \equiv \sigma \equiv \varepsilon \pmod{\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}},$$

und aus dem Grunde ist

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \tau^{-1}\mathfrak{P}'_\mathfrak{p}\tau .$$

Der Hilfssatz 6 ist damit bewiesen.

3. Nunmehr kann zu dem Beweis des Satzes 1 geschritten werden. Wir zeigen zunächst, daß die in ihm genannte Bedingung notwendig ist.

Ist nämlich

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{J}\mu$$

ein Hauptideal, und genügt μ in K einer irreduziblen Gleichung n-ten Grades, so ist $\mathsf{K}(\mu)$ ein Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$, und aus dem Grunde ist

$$n(\mu) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}.$$

$n\mathfrak{M}$ gehört also zum Strahl mod $\mathfrak{u}$. Genügt aber μ nicht einer irreduziblen Gleichung n-ten Grades in K, so gilt

$$n(\mu) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}$$

trotzdem. Denn ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eine K-Basis von $\mathfrak{A}$, so kann man nach dem Irreduzibilitätssatze von Hilbert den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ solche Werte in K erteilen, daß die Hauptgleichungen von

$$\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m \quad \text{und} \quad \mu\xi$$

in K irreduzibel sind, und dann gilt nach Obigem

$$n(\mu) \equiv n(\mu\xi) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}.$$

4. Es sei jetzt $\mathfrak{M}$ ein ganzes Ideal von $\mathfrak{A}$ mit der Linksordnung $\mathfrak{J}$, dessen Norm zum Strahl mod $\mathfrak{u}$ gehört:

$$n\mathfrak{M} = (m), \qquad m \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}.$$

Wenn bewiesen werden soll, daß $\mathfrak{M}$ Hauptideal ist, braucht dasselbe nur für irgendein Ideal

$$\mathfrak{P} = \mu\mathfrak{M}^{-1}$$

gezeigt zu werden. Diese Tatsache gestattet es uns, den Beweis für die Hauptidealeigenschaft auf einen einfachen Spezialfall zu reduzieren.

$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_h$ sei ein Repräsentantensystem aller Typen von Maximalordnungen. Es sei speziell so ausgewählt, daß die Distanzideale $(\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}_i)^{-1}$ zu $n\mathfrak{M} = (m)$ und zur Diskriminante $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{J}$ prime Normen haben; diese Bedingung kann deshalb stets erfüllt werden, weil bekanntlich jede Idealklasse Ideale enthält, deren Normen zu einem gegebenen Zentrumsideal teilerfremd sind. Nun gibt es eine zu (m) und zu $\mathfrak{d}$ prime Zahl a in K, die durch die Normen aller Distanzen $(\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}_i)^{-1}$ teilbar ist, und sie hat die Eigenschaft, daß für jedes $i = 1, 2, \ldots, h$

$$a\mathfrak{J}_i < \mathfrak{J}$$

gilt. Weiterhin sei $\mu_\mathfrak{p}$ für jeden Primteiler $\mathfrak{p}$ von $n\mathfrak{M}$ eine Zahl mit den im Hilfssatz 5 angegebenen Eigenschaften, und für jeden Primteiler $\mathfrak{p}$ von a sei

$$\mu_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 \\ 0 & & & m \end{pmatrix},$$

wenn $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ als die Ordnung aller n-reihigen Matrizen mit ganzen Koeffizienten aus $\mathsf{K}_\mathfrak{p}$ dargestellt wird.

Wird nun $\mathfrak{a} = (m^2 a^n)$ gesetzt, so sind alle Bedingungen des Hilfssatzes 4 erfüllt, und es gibt daher in $\mathfrak{J}$ eine Zahl μ_1, die in K einer irreduziblen Gleichung n-ten Grades genügt, und für die

$$\mu_1 \equiv \mu_\mathfrak{p} \pmod{\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\mathfrak{J}_\mathfrak{p}}, \quad (\mu_1, \mathfrak{F}_{\mu_1}) = (1)$$

gilt. Es ist $\frac{n(\mu_1)}{n\mathfrak{M}}$ ganz und zu $an\mathfrak{M}$ prim, daher wird (μ_1) in $\mathsf{K}(\mu_1)$ in ein Produkt zweier Ideale zerlegt:

$$(\mu_1) = \mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1,$$

wobei $n\mathfrak{M}_1 = n\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}_1$ zu $\mathfrak{F}_{\mu_1} an\mathfrak{M}$ prim ist. Nun werde in $\mathsf{K}(\mu_1)$ nach dem Satz von der arithmetischen Progression ein zu $\mathfrak{d}$ teilerfremdes Primideal $\mathfrak{P}_1$ ersten Grades bestimmt, welches die Kongruenz

$$\mathfrak{P}_1 \equiv \mathfrak{N}_1 \pmod{\mathfrak{F}_{\mu_1} a^n n\mathfrak{M}}$$

befriedigt. Es ist

$$\mathfrak{M}_1\mathfrak{P}_1 = (\mu)$$

und

$$\mu \equiv \mu_1 \pmod{\mathfrak{F}_{\mu_1} a^n n\mathfrak{M}}.$$

Insbesondere ist $\mu \equiv \mu_1 \pmod{\mathfrak{F}_{\mu_1}}$, deswegen liegt μ, ebenso wie μ_1, in $\mathfrak{J}$ und wegen $\mu \equiv \mu_1 \pmod{n\mathfrak{M}}$ sogar in $\mathfrak{M}$. Daher ist

$$\mathfrak{P} = \mu\mathfrak{M}^{-1}$$

ein ganzes Ideal, seine Norm ist

$$n\mathfrak{P} = n\mathfrak{P}_1 = (p) = \left(\frac{n(\mu)}{m}\right).$$

Nach **3** gehört sie wie $n\mathfrak{M}$ zum Strahl mod $\mathfrak{u}$. (p) ist Primideal ersten Grades, weil $\mathfrak{P}_1$ ein Primideal ersten Grades ist. Und schließlich gilt für jedes in a aufgehende Primideal $\mathfrak{p}$

$$p = \frac{n(\mu)}{m} \equiv \frac{n(\mu_1)}{m} \equiv \frac{n(\mu_\mathfrak{p})}{m} = 1 \pmod{a_\mathfrak{p}^n},$$

also

$$p \equiv 1 \pmod{a^n}.$$

Das so konstruierte Ideal $\mathfrak{P}$ kann nun als Hauptideal nachgewiesen werden; es werde dazu $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{P}$ ersetzt. Die Maximalordnungen $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_h$ und die Zahl a mögen die oben erklärte Bedeutung behalten. Ferner seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots$ alle Ideale der Norm (p) und der Linksordnung $\mathfrak{J}$:

$$n\mathfrak{P} = n\mathfrak{P}' = n\mathfrak{P}'' = \cdots = (p) = \mathfrak{p}$$

und $\tau', \tau'', \ldots$ solche nach Hilfssatz 6 existierenden Zahlen aus $\mathfrak{J}$, daß

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \tau'^{-1}\mathfrak{P}'_\mathfrak{p}\tau' = \tau''^{-1}\mathfrak{P}''_\mathfrak{p}\tau'' = \cdots$$

gilt, und daß p modulo jeder Potenz von $(n(\tau'))$, $(n(\tau''))$, $\ldots$ ein n-ter Potenzrest wird. Es werde

$$n(\tau')n(\tau'')\cdots = b, \quad ab = c$$

geschrieben. Dann ist p ein n-ter Potenzrest mod c^n, d. h. es gibt eine ganze Zahl t in K, welche die Kongruenz

$$p \equiv t^n \pmod{c^n}$$

befriedigt.

Da p zu $\mathfrak{d}$ prim ist, ist p für jeden Primteiler $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{d}$ die Norm einer ganzen Zahl aus dem unverzweigten Relativkörper n-ten Grades über $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$; infolgedessen gibt es für jedes dieser $\mathfrak{q}$ ein Polynom

$$g_\mathfrak{q}(x) = x^n + a_{1,\mathfrak{q}}x^{n-1} + \cdots + a_{n-1,\mathfrak{q}}x + (-1)^n p$$

mit ganzen Koeffizienten aus $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$, welches in $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$ irreduzibel ist. $h_\mathfrak{q}$ bezeichne solche nach Hilfssatz 1 existierenden Exponenten, daß jedes Polynom, welches $g_\mathfrak{q}(x)$ mod $\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}$ kongruent ist, in $\mathsf{K}_\mathfrak{q}$ ebenfalls irreduzibel ist.

Nun kann man ein Polynom

$$g(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + (-1)^n p$$

mit ganzen Koeffizienten aus K konstruieren, welches den Kongruenzen

$$g(x) \equiv g_\mathfrak{q}(x) \pmod{\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}} \quad \text{für alle } \mathfrak{q} \mid \mathfrak{d},$$

$$g(x) \equiv (x-t)^n \pmod{c^n}$$

genügt.

Wenn $\mathfrak{u} = (1)$ ist, d. h. wenn $\mathfrak{A}$ keine unendlichen Verzweigungsprimstellen besitzt, so erzeugt jetzt eine Wurzel von $g(x) = 0$ einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$. Infolgedessen [8]) enthält $\mathfrak{A}$ eine Wurzel π von $g(x) = 0$. Nun ist $\dfrac{\pi - t}{c}$ eine ganze Zahl; ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf vorausgesetzt werden, daß sie in einer der Maximalordnungen $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n$ liegt. Dann ist $a\dfrac{\pi - t}{c} = \dfrac{\pi - t}{b} = \nu$ und mithin auch π in $\mathfrak{J}$ enthalten. Wegen $n(\pi) = p$ ist jetzt $\mathfrak{J}\pi$ ein ganzes Ideal der Norm (p). Wäre $\mathfrak{J}\pi = \mathfrak{P}$, so wäre $\mathfrak{P}$ bereits als Hauptideal nachgewiesen. Sonst ist jedenfalls $\mathfrak{J}\pi$ einem der Ideale $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots$ gleich, es sei etwa $\mathfrak{J}\pi = \mathfrak{P}'$. Dann ist

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{p} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}\tau'^{-1}\pi\tau'.$$

Es ist aber

$$\tau'^{-1}\pi\tau' = b\tau'^{-1}\nu\tau' + t,$$

und weil b durch $n(\tau')$ teilbar ist und τ' und ν in $\mathfrak{J}$ enthalten sind, liegt auch $\tau'^{-1}\pi\tau'$ in $\mathfrak{J}$. Dann ist aber

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J}\tau'^{-1}\pi\tau',$$

und der Beweis des Satzes 1 ist erbracht.

Ist aber $\mathfrak{u} \neq (1)$, und das kann nur für gerades n eintreten, so müssen die Fälle $n > 2$ und $n = 2$ getrennt behandelt werden. Es werde zunächst $n > 2$ angenommen. Dann ist $g(x)$ wegen $p = (-1)^n p \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}}$ für grosse negative und positive x sowie für $x = 0$ positiv an allen zu $\mathfrak{u}$ gehörigen unendlichen Primstellen. Man kann nun eine ganze und rationale Zahl A, die durch alle $\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}$ und durch c^n teilbar ist, derart bestimmen, daß

$$g_1(x) = g(x) + Ax^2$$

für alle reellen x positiv an allen zu $\mathfrak{u}$ gehörigen unendlichen Primstellen wird. Dann erzeugt eine Wurzel von $g_1(x) = 0$ einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$, und man kann jetzt den Beweis dadurch zu Ende führen, daß man $g(x)$ durch $g_1(x)$ ersetzt.

---

[8]) H. Hasse, Theory of cyclic algebras over an algebraic number field, Transactions Amer. Math. Soc. 34 (1932), S. 171, Satz (II. 2).

5. Ist zweitens $n = 2$,

$$g(x) = x^2 + ex + p,$$

und kann man eine ganze Zahl e_1 in K derart finden, daß

$$e_1 \equiv e \pmod{\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}} \quad \text{für alle } \mathfrak{q} \mid \mathfrak{d},$$
$$e_1 \equiv e \pmod{c^n}$$

gilt, und daß $e_1^2 - 4p$ an allen zu $\mathfrak{u}$ gehörigen unendlichen Primstellen negativ wird, so liefert eine Wurzel von

$$g_1(x) = x^2 + e_1 x + p = 0$$

einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$, und man braucht oben nur $g(x)$ durch $g_1(x)$ zu ersetzen, um den Beweis zu Ende zu führen.

Wenn $\mathfrak{u}$ nicht alle unendlichen Primstellen von K umfaßt, so kann eine Zahl e_1 mit den genannten Eigenschaften in der Tat gefunden werden. Um dies zu zeigen, seien die Konjugierten zu einer Zahl z aus K mit $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$ bezeichnet, und zwar mit $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(k)}$ speziell diejenigen, die zu den unendlichen Verzweigungsprimstellen von $\mathfrak{A}$ gehören. Wird unter A schließlich eine ganze und rationale, durch alle $\mathfrak{q}^{h_\mathfrak{q}}$ und durch c^n teilbare Zahl verstanden, so kann man die Existenz einer solchen Zahl e_1 aus dem nachstehenden Hilfssatz entnehmen:

Hilfssatz 7. *e sei irgendeine Zahl aus K und $A > 0$ eine rationale; $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(k)}$ seien zu e konjugierte Zahlen, die in reellen zu K konjugierten Körpern liegen mögen. Ausgenommen in dem Falle, wo k gleich dem Grad m des Körpers K ist, gibt es ganze Zahlen y in K derart, daß die Beträge der Differenzen $e_1^{(i)} = e^{(i)} - Ay^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ unter beliebig vorgegebenen Schranken ε_i liegen:*

$$|e^{(i)} - Ay^{(i)}| < \varepsilon_i.$$

Beweis. Es gibt in K gewiß eine ganze Zahl w, für die $|w^{(1)}|$ kleiner als $\frac{\varepsilon_1}{A}$ angenommen werden darf. Dann ist

$$\left| e^{(1)} - A\left[\frac{e^{(1)}}{Aw^{(1)}}\right] w^{(1)} \right| = |e^{(1)} - Ay^{(1)}| < \varepsilon_1,$$

der Hilfssatz 7 gilt mithin für $k = 1$ [9]). Er werde bereits für $k - 1$ als richtig angenommen. Dann gibt es eine ganze Zahl z in K, die den Ungleichungen

$$|e^{(i)} - Az^{(i)}| < \frac{\varepsilon_i}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

genügt. Ist nun $\left[\frac{e^{(k)} - Az^{(k)}}{\varepsilon_k}\right] = 0$, so ist auch schon

$$|e^{(k)} - Az^{(k)}| < \varepsilon_k,$$

und es hat z die erforderliche Eigenschaft; sonst ist für jede reelle Zahl $T \geqq 1$ auch

$$\left[T\frac{e^{(k)} - Az^{(k)}}{\varepsilon_k}\right] \neq 0.$$

Jetzt existiert nach dem Hilfssatz von Minkowski über homogene Linearformen eine ganze Zahl v in K, die den Ungleichungen

---

[9]) Für positives reelles T bedeute $[T]$ die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich T ist, und es gelte $[-T] = -[T]$.

$$|v^{(i)}| < \frac{\varepsilon_i}{2A} \frac{1}{\left[|\sqrt{D}| \dfrac{e^{(k)} - Az^{(k)}}{\varepsilon_k}\right]} = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

$$|v^{(k)}| < \frac{\varepsilon_k}{A} = \eta_k,$$

$$|v^{(i)}| < \eta_i \qquad (i = k+1, \ldots, m)$$

genügt, wenn D die Diskriminante von K bezeichnet und die $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_m$ so angenommen werden, daß

$$\prod_{i=1}^{m} \eta_i = |\sqrt{D}|$$

ist (für konjugiert komplexe $v^{(i)}$ müssen die Schranken η_i gleich sein). Es ist $1 \leqq \prod_{i=1}^{m} |v^{(i)}|$,

$$|v^{(k)}| \geqq \left| \frac{1}{v^{(1)} \cdots v^{(k-1)} v^{(k+1)} \cdots v^{(m)}} \right| > \frac{1}{\eta_1 \cdots \eta_{k-1} \eta_{k+1} \cdots \eta_m} = \frac{\eta_k}{|\sqrt{D}|} = \frac{\varepsilon_k}{A|\sqrt{D}|}.$$

Die Zahl

$$y = z + \left[\frac{e^{(k)} - Az^{(k)}}{Av^{(k)}}\right] v$$

besitzt nun die geforderte Eigenschaft: y ist ganz, ferner ist für $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$|e^{(i)} - Ay^{(i)}| \leqq |e^{(i)} - Az^{(i)}| + A\left|\left[\frac{e^{(k)} - Az^{(k)}}{Av^{(k)}}\right] v^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon_i}{2} + A\left|\left[|\sqrt{D}| \frac{e^{(k)} - Az^{(k)}}{\varepsilon_k}\right] v^{(i)}\right| < \varepsilon_i$$

und

$$|e^{(k)} - Ay^{(k)}| = \left| e^{(k)} - Az^{(k)} - A\left[\frac{e^{(k)} - Az^{(k)}}{Av^{(k)}}\right] v^{(k)} \right| < \varepsilon_k.$$

Damit ist der Hilfssatz 7 bewiesen.

Eingegangen 30. Mai 1936.

Einige Untersuchungen über geordnete Schiefkörper.

Von *Ruth Moufang* in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Ein allgemeines Konstruktionsprinzip zur Erzeugung von Schiefkörpern ohne endliche Basis hat G. Köthe [1]) gegeben. Die erhaltenen Schiefkörper sind so beschaffen, daß je endlich viele Elemente in einem Schiefkörper mit endlicher Basis gelegen sind, eine Eigenschaft, die hier die Anordbarkeit ausschließt [2]).

Den folgenden Untersuchungen liegt die Frage nach einem Konstruktionsprinzip für anordbare Schiefkörper zugrunde. Ausgangspunkt ist der Gruppenring: Man bilde aus den Elementen einer aus a und b erzeugten Gruppe G über den rationalen Zahlen endliche Linearkombinationen (die verschiedenen Elemente von G bilden die abzählbar unendliche Basis des Rings). Ist G abelsch und erfüllen die Erzeugenden a, b keine Relation, die nicht in allen abelschen Gruppen erfüllt ist, so ist der Gruppenring in einen geordneten kommutativen Körper einbettbar. Ist G die freie Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist die Frage nach der Einbettbarkeit des Gruppenrings in einen Schiefkörper noch unentschieden (vgl. S. 208). Im folgenden behandeln wir den Fall, daß G metabelsch [3]) ist. Es zeigt sich:

Der Gruppenring der metabelschen Gruppe ist in einen geordneten Schiefkörper einbettbar.

Das allgemeine Element des Schiefkörpers ist eine Laurent-Reihe in b mit endlich vielen negativen Potenzen, deren Koeffizienten Laurent-Reihen in a vom selben Typ sind; ihre Koeffizienten sind rationale Funktionen mit rationalen Koeffizienten von endlich vielen der abzählbar unendlich vielen Unbestimmten $v_{\nu\mu}$ $(\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, die unter sich vertauschbar sind. Bei der Konstruktion des Schiefkörpers wird von der *Darstellung der metabelschen Gruppe mit Hilfe von symbolischen Potenzen des Kommutators von a und b* Gebrauch gemacht (§§ 1, 2). Der Hilbertsche Schiefkörper [4]) erscheint als einfachster Spezialfall unserer Konstruktion (§ 3).

Es zeigt sich ferner, daß der Gruppenring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ der metabelschen Gruppe sogar in einen geordneten Schiefkörper einbettbar ist, der nur eine *endliche Anzahl von Parametern* enthält, nämlich drei (b, a, x) über dem Körper der rationalen Funktionen von zwei Unbestimmten als Zentrum; das allgemeine Element des Schiefkörpers ist eine

---

[1]) G. Köthe, Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum, Math. Annalen **105** (1931), S. 15—39.

[2]) Über den Zusammenhang von Anordbarkeit und Endlichkeit der Basis siehe die Arbeit von Herrn W. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme, Math. Annalen **113** (1936), S. 528—567.

[3]) Wir verstehen hier und im folgenden unter der metabelschen Gruppe die allgemeinste metabelsche Gruppe, bei der also die Erzeugenden a, b nur solchen Relationen genügen, die in allen metabelschen Gruppen erfüllt sind.

[4]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. 1930, § 33.

Laurent-Reihe in b, a, x mit jeweils nur endlich vielen negativen Potenzen und mit Koeffizienten aus dem Zentrum (§§ 4, 5).

Der Ring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ enthält als Unterring den *freien Ring* $\mathfrak{F}$ *aus zwei Erzeugenden* a, b, gebildet aus den Linearkombinationen von endlich vielen verschiedenen Potenzprodukten in a, b mit positiven Exponenten und mit rationalen Koeffizienten. Die Einbettung von $\mathfrak{F}$ in einen geordneten Schiefkörper ist mit der Einbettung von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ in einen solchen geleistet. Es zeigt sich aber, daß man bereits einfachere geordnete Schiefkörper angeben kann, die zu $\mathfrak{F}$ isomorphe Unterringe enthalten (§ 1, Nr. 5; § 3, Nr. 3; § 4, Nr. 8).

§ 1. Die metabelsche Gruppe und ihr Gruppenring.

1. Die Elemente der metabelschen Gruppe $\mathfrak{M}$ aus zwei Erzeugenden a, b lassen sich bekanntlich [5]) mit Hilfe symbolischer Potenzen des Kommutators

$$u = bab^{-1}a^{-1}$$

so darstellen, daß jedem Potenzprodukt P in a, b, a^{-1}, b^{-1} eindeutig ein Ausdruck $u^{\varphi}a^{\alpha}b^{\beta}$ zugeordnet ist, wo φ ein Polynom in den kommutativen Variablen a, b, a^{-1}, b^{-1} mit ganzen Koeffizienten, α die Exponentensumme von a in P, β die Exponentensumme von b in P ist. Diese Darstellung wird erhalten durch sukzessive Anwendung der folgenden Springregeln

$$b^l a^k = u^{\frac{a^k-1}{a-1}\frac{b^l-1}{b-1}} a^k b^l = u^{\varepsilon_k\varepsilon_l a^{\frac{\varepsilon_k-1}{2}} b^{\frac{\varepsilon_l-1}{2}} p_k q_l} a^k b^l \tag{1}$$

mit

$$k = \varepsilon_k |k|, \qquad l = \varepsilon_l |l|,$$

$$p_k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1}, \quad p_{-k} = 1 + a^{-1} + a^{-2} + \cdot\ \cdot + a^{-k+1} \qquad (k > 0),$$

$$q_l = 1 + b + b^2 + \cdots + b^{l-1}, \quad q_{-l} = 1 + b^{-1} + b^{-2} + \cdots + b^{-l+} \qquad (l > 0),$$

$$p_0 = q_0 = 0, \quad p_1 = p_{-1} = q_1 = q_{-1} = 1,$$

$$b^l u^{\psi} = u^{\psi b^l} b^l, \tag{2}$$

$$a^k u^{\chi} = u^{\chi a^k} a^k, \tag{3}$$

wobei k, l ganz, ψ, χ Polynome in a, a^{-1}, b, b^{-1} mit ganzen Koeffizienten sind.

Die Darstellung

$$P = u^{\varphi}a^{\alpha}b^{\beta}$$

ist im allgemeinen nicht eineindeutig; indessen ist dies der Fall, sofern in dem Potenzprodukt P nur positive Exponenten vorkommen. Dann hat man

$$P = b^{k_1}a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}\cdots b^{k_t}a^{l_t} = u^{\varphi}a^{\alpha}b^{\beta}$$

mit

$$\alpha = \Sigma l_i, \qquad \beta = \Sigma k_i,$$

$$\varphi = q_{k_1}p_{l_1} + a^{l_1}q_{k_1+k_2}p_{l_2} + \cdots + a^{l_1+l_2+\cdots+l_{t-1}}q_{k_1+k_2+\ \cdot\ +k_t}p_{l_t}.$$

Analog sei

$$P' = u^{\varphi'}a^{\alpha'}b^{\beta'}.$$

---

[5]) Für das Folgende siehe etwa Ph. Furtwängler, Beweis des Hauptidealsatzes für den Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), S. 14—36. Unsere Bezeichnung weicht von der dort gegebenen ab. Wir setzen

$$aua^{-1} = u^a, \quad a^{-1}ua = u^{a^{-1}}, \quad bub^{-1} = u^b, \quad b^{-1}ub = u^{b^{-1}} \quad \text{usw.}$$

Die a, b im Exponenten von u sind kommutative Variable, die Erzeugenden a, b der metabelschen Gruppe dagegen nicht kommutativ.

Ist $u^{\varphi'} a^{\alpha'} b^{\beta'}$ formal identisch mit $u^{\varphi} a^{\alpha} b^{\beta}$, also $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ und $\varphi' \equiv \varphi$, so folgt, daß P' mit P formal identisch ist:

$$\varphi' = q_{k_1'} p_{l_1'} + a^{l_1'} q_{k_1'+k_2'} p_{l_2'} + \cdots + a^{l_1'+l_2'+\cdots+l_{s-1}'} q_{k_1'+k_2'+\cdots+k_s'} p_{l_s'}.$$

Nimmt man in φ bzw. φ' die höchste vorkommende Potenz von b, so folgt durch Koeffizientenvergleich

$$a^{l_1+l_2+\cdots+l_{t-1}} p_{l_t} = a^{l_1'+l_2'+\cdots+l_{s-1}'} p_{l_s'},$$

daraus durch Vergleich der niedrigsten Potenz von a

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_{t-1} = l_1' + l_2' + \cdots + l_{s-1}', \quad \text{also} \quad l_t = l_s'.$$

Aus

$$q_{k_1} p_{l_1} + \cdots + a^{l_1+l_2+\cdots+l_{t-2}} q_{k_1+\cdots+k_{t-1}} p_{l_{t-1}} = q_{k_1'} p_{l_1'} + \cdots + a^{l_1'+l_2'+\cdots+l_{s-2}'} q_{k_1'+\cdots+k_{s-1}'} p_{l_{s-1}'}$$

folgt jetzt durch Vergleich der beiderseits höchsten vorkommenden Potenz von b

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{t-1} = k_1' + k_2' + \cdots + k_{s-1}', \quad \text{also} \quad k_t = k_s',$$

und durch Vergleich der zugehörigen Koeffizienten

$$a^{l_1+\cdots+l_{t-2}} p_{l_{t-1}} = a^{l_1'+\cdots+l_{s-1}'} p_{l_{s-1}'}, \quad \text{also} \quad l_{t-1} = l_{s-1}'.$$

Durch Fortsetzung folgt die Behauptung $P' \equiv P$.

2. Zu $\mathfrak{M}$ gehört ein Gruppenring aus den Elementen $\sum_{i=1}^{N} r_i P_i$, r_i rational, P_i Element aus $\mathfrak{M}$. Die Addition ist erklärt durch Addition gleichstelliger Koeffizienten r_i, die Multiplikation durch gliedweises Ausmultiplizieren. Dadurch erhält man einen Ring. Gebrauchen wir für die P die obige Darstellung, so hat man als Ringelement

$$\sum_{\nu, n, m} r_{\nu n m} u^{\varphi_\nu} a^n b^m,$$

wo die Zeiger ν bzw. n, m endlich viele natürliche bzw. ganze Zahlen durchlaufen. Die Multiplikation ist jetzt gegeben durch die Formel

$$(4) \quad \sum_{\nu, n, m} r_{\nu n m} u^{\varphi_\nu} a^n b^m \cdot \sum_{\mu, k, l} \varrho_{\mu k l} u^{\psi_\mu} a^k b^l = \sum_{\substack{\nu, n, m \\ \mu, k, l}} r_{\nu n m} \varrho_{\mu k l} u^{\varphi_\nu + a^n b^m \psi_\mu + a^n \frac{a^k-1}{a-1} \frac{b^m-1}{b-1}} a^{n+k} b^{m+l}$$

$$= \sum_{\substack{\nu, n, m \\ \mu, k, l}} r_{\nu n m} \varrho_{\mu k l} u^{\varphi_\nu + a^n b^m \psi_\mu + \varepsilon_k \varepsilon_m a \frac{\varepsilon_k-1}{2} b \frac{\varepsilon_m-1}{2} a^n p_k q_m} a^{n+k} b^{m+l}.$$

Die Basiselemente dieses Rings $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ sind Potenzprodukte in den nicht-kommutativen Unbestimmten a, b, a^{-1}, b^{-1} und je endlich vielen der untereinander vertauschbaren Unbestimmten $v_{ki} = u^{\pm a^i b^k}$ $(i, k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Um die Assoziativität der durch (4) definierten Multiplikation einzusehen, hat man zu beweisen

$$\{u^{\varphi} a^k b^l \cdot u^{\psi} a^m b^h\} \cdot u^{\chi} a^s b^t = u^{\varphi} a^k b^l \cdot \{u^{\psi} a^m b^h \cdot u^{\chi} a^s b^t\}.$$

Durch Vergleich der Exponenten von u in den beiderseitigen Normalformen erhält man

$$(5) \quad \begin{aligned} &\varphi + a^k b^l \psi + a^k \frac{a^m - 1}{a - 1} \frac{b^l - 1}{b - 1} + a^{m+k} b^{l+h} \chi + a^{m+k} \frac{a^s - 1}{a - 1} \frac{b^{l+h} - 1}{b - 1} \\ &= \varphi + a^k b^l \psi + a^{k+m} b^{l+h} \chi + a^{m+k} \frac{a^s - 1}{a - 1} b^l \frac{b^h - 1}{b - 1} + a^k \frac{a^{m+s} - 1}{a - 1} \frac{b^l - 1}{b - 1}, \end{aligned}$$

und dies ist eine Identität.

3. Der soeben konstruierte Ring ist offenbar Unterring in dem Ring $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ mit dem allgemeinen Element

$$\sum_{k=M}^{\infty}\left(\sum_{i=N_k}^{\infty} R_{ik}\,a^i\right)b^k,$$

wo N_k, $M \gtreqless 0$ ganz und R_{ik} eine rationale Funktion von endlich vielen der $u^{a^\nu b^\mu}$ $(\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ist. Wir schreiben diese Doppelsumme im folgenden kürzer $\sum_{i,k} R_{ik}a^ib^k$.

Die Addition ist erklärt durch

$$\sum_{i,k} R_{ik}a^ib^k + \sum_{i,k} \mathsf{P}_{ik}a^ib^k = \sum_{i,k}(R_{ik}+\mathsf{P}_{ik})a^ib^k = \sum_{i,k} S_{ik}a^ib^k,$$

wo die P_{ik}, S_{ik} analoge Bedeutung haben wie die R_{ik}.

Die Multiplikation ist sinngemäß im Anschluß an das Vorige definiert. Setzt man

$$\mathsf{P}_{nm} = \frac{\sum_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)}}}{\sum_h \overline{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)}}} \qquad \text{(nicht alle } \overline{\varrho}_h = 0),$$

so ist

$$(6)\qquad \sum_{i,k} R_{ik}a^ib^k \cdot \sum_{n,m}\mathsf{P}_{nm}a^nb^m = \sum_{\substack{i,k,\\ n,m}} R_{ik}\,\frac{\sum_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)}\cdot a^ib^k}}{\sum_h \overline{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)}\cdot a^ib^k}}\, u^{a^i\frac{a^n-1}{a-1}\frac{b^k-1}{b-1}}\,a^{i+n}\,b^{k+m}.$$

Sind insbesondere die R und P ganzrationale Funktionen, die sich auf einen Summanden u^φ reduzieren, so geht (6) in (4) über. Sind die R, P allgemeine ganzrationale Funktionen, so folgt (6) aus (4) vermöge der distributiven Gesetze. Treten in R, P Nenner auf, so benutze man zur Herleitung von (6) die Springregel

$$\begin{aligned} b^k\mathsf{P}_{nm} &= b^k \sum_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)}} \Big(\sum_h \overline{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)}}\Big)^{-1} \\ &= \sum_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)}b^k} \Big(\sum_h \overline{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)}}\, b^{-k}\Big)^{-1} \\ &= \sum_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)}b^k} \Big(b^{-k}\sum_h \overline{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)}b^k}\Big)^{-1} \\ &= \frac{\sum_l \varrho_l^{(n,m)} u^{\varphi_l^{(n,m)}b^k}}{\sum_h \overline{\varrho}_h^{(n,m)} u^{\psi_h^{(n,m)}b^k}}\, b^k. \end{aligned}$$

Die Assoziativität der durch (6) definierten Multiplikation folgt durch eine einfache Überlegung aus der Assoziativität innerhalb des Rings $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$; die zu beweisende Gleichung führt nämlich sofort auf (5).

4. *Der Ring $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ ist ein Schiefkörper.* Zunächst ist $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ nullteilerfrei. Wir setzen ein Element $\sum_{i,k} R_{ik}a^ib^k$ dann gleich Null, wenn alle R_{ik} gleich Null sind, d. h. wenn in jedem R_{ik} alle Koeffizienten im Zähler (aber nicht alle Koeffizienten im Nenner) verschwinden. Zwei Elemente heißen gleich, wenn ihre Differenz verschwindet.

Sei

$$\Omega = \sum_{\substack{i=N_k,\ldots\infty\\ k=M,\ldots\infty}} R_{ik}a^ib^k \neq 0, \qquad R_{N_M\,M} \neq 0,$$

$$\Omega' = \sum_{\substack{n=N'_m,\ldots\infty\\ m=M',\ldots\infty}} \mathsf{P}_{nm}a^nb^m \neq 0, \qquad \mathsf{P}_{N'_{M'}\,M'} \neq 0$$

$$(N_k,\ M,\ N'_m,\ M' \gtreqless 0,\ \text{ganz}),$$

so ist auch das Produkt dieser beiden Elemente von Null verschieden, denn das Glied $a^{N_M+N'_{M'}}\, b^{M+M'}$ kommt genau einmal vor, versehen mit dem Koeffizienten

$$c = R_{N_M\, M}\, \frac{\sum_l \varrho_l^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\varphi_l^{(N'_{M'},\, M')} a^{N_M}\, b^M}}{\sum_h \varrho_h^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\psi_h^{(N'_{M'},\, M')} a^{N_M}\, b^M}}\, u^{a^{N_M}\, \frac{a^{N'_{M'}-1}}{a-1}\, \frac{b^{M-1}}{b-1}},$$

der von Null verschieden ist, da die rationalen Funktionen von endlich vielen kommutativen Unbestimmten, hier $u^{a^\nu b^\mu}$, keine Nullteiler haben.

Das Element mit $R_{00} = 1$, $R_{ik} = 0$ sonst, ist die Haupteinheit des Rings; man hat jetzt zu zeigen: Die Gleichung

$$\Omega\Omega' = 1$$

hat bei gegebenem $\Omega' \neq 0$ mindestens eine Lösung Ω, bei gegebenem $\Omega \neq 0$ mindestens eine Lösung Ω'. Die Einzigkeit der ersten bzw. zweiten Lösung folgt dann aus der Nullteilerfreiheit, endlich die Übereinstimmung der ersten mit der zweiten Lösung nach dem bekannten Schluß mit Hilfe des assoziativen Gesetzes.

Eine Lösung von $\Omega\Omega' = 1$ bei gegebenem Ω' gewinnt man mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten generell genau so wie beim Hilbertschen Schiefkörper (siehe Anm. [4])). Gegeben sind die P_{nn}, die R_{ik} gesucht. Zwischen den P und den R besteht analog wie bei Hilbert ein System von in R linearen Relationen, aus denen sich die Unbekannten R_{ik} sukzessive bestimmen. Zunächst läuft k von $-M'$ bis ∞, i von $-N'_{M'}$ bis ∞; man findet den Wert von $R_{-N'_{M'},\,-M'}$ aus $c = 1$, daraus rekursiv alle $R_{i,\,-M'}$ und weiterhin ein R_{ik} mit festem i, k rekursiv aus den $R_{i'k}$ mit $i' < i$ und den ebenfalls bekannten $R_{jk'}$ mit $k' < k$. In der linearen Beziehung, die R_{ik} liefert, kommt R_{ik} mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vor, nämlich abgesehen von einer reinen symbolischen Potenz von u, mit

$$\frac{\sum_l \varrho_l^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\varphi_l^{(N'_{M'},\, M')} \cdot a^i \cdot b^k}}{\sum_h \varrho_h^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\varphi_h^{(N'_{M'},\, M')} \cdot a^i \cdot b^k}}.$$

Um die Gleichung $\Omega\Omega' = 1$ bei gegebenem Ω aufzulösen, bedient man sich ebenfalls des Ansatzes der unbestimmten Koeffizienten, hier P_{nm}. Das System der durch Koeffizientenvergleich nach b und a resultierenden Gleichungen ist jetzt nicht mehr in den P_{nm} selbst linear, sondern in den rationalen Funktionen, die aus den P_{nm} dadurch hervorgehen, daß die im Exponenten von u auftretenden φ und ψ jedesmal einen festen Faktor erhalten, nämlich $a^{N_M}\, b^M$ für dasjenige P, das in einer solchen Gleichung den größten Index m und dann den größten Index n hat. Aus $c = 1$ findet man $\mathsf{P}_{N'_{M'}\, M'}$ ($N'_{M'} = -N_M$, $M' = -M$), indem man

$$\left(R_{N_M\, M}\, u^{a^{N_M}\, \frac{a^{N'_{M'}-1}}{a-1}\, \frac{b^{M-1}}{b-1}}\right)^{-1}$$

wieder als Bruch schreibt und im Zähler und Nenner in jedem Exponenten von u den Faktor $a^{-N_M}\, b^{-M}$ anbringt. — Damit ist man fertig.

5. Der Schiefkörper $\mathfrak{S}_\mathfrak{M}$ enthält einen zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{M}$ isomorphen Teilring, folglich auch einen zu $\mathfrak{F}$ isomorphen Teilring. In $\mathfrak{S}_\mathfrak{M}$ sind nämlich die Potenzprodukte in a, b zu endlich vielen über den rationalen Zahlen linear unabhängig, weil sie in $\mathfrak{S}_\mathfrak{M}$ verschiedene Normalformen haben (s. Nr. **1**).

Gelänge es darüber hinaus, in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ zwei Elemente ξ, η so anzugeben, daß alle Potenzprodukte in $\xi, \xi^{-1}, \eta, \eta^{-1}$ zu je endlich vielen über den rationalen Zahlen linear unabhängig sind, so wäre bewiesen, daß $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ sogar einen zu $\mathfrak{G}$ isomorphen Teilring enthält, womit die Einbettung des Gruppenringes der freien Gruppe aus zwei Erzeugenden in einen Schiefkörper geleistet wäre.

§ 2. Anordnung des Schiefkörpers $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$.

1. Wir ordnen zunächst die Polynome φ der Argumente a, b, a^{-1}, b^{-1} (a, b sind kommutative Variable) mit ganzen Koeffizienten so an: es sei dann und nur dann $\varphi = 0$, wenn alle Koeffizienten verschwinden, und es sei $\varphi \gtrless 0$, je nachdem die kleinste vorkommende Potenz von b als Koeffizienten ein solches Polynom in a, a^{-1} hat, dessen niedrigste vorkommende Potenz von a einen ganzzahligen Koeffizienten $\gtrless 0$ hat. Dieses Glied in φ wollen wir das Hauptglied nennen. Nun sei $\varphi \gtrless \psi$, falls $\varphi - \psi \gtrless 0$ ist.

Diese Anordnung ist monoton: Aus $\varphi > 0$, $\psi > 0$ folgt

$$\varphi + \psi > 0, \quad \varphi\psi > 0,$$

wie man sofort einsieht.

Nun sei

$$A = \sum_{i=1}^{h} r_i u^{\varphi_i} \gtrless 0,$$

je nachdem $r_1 \gtrless 0$, sofern $\varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_h$. Ist

$$A' = \sum_{k=1}^{l} r'_k u^{\psi_k}, \quad \psi_1 < \cdots < \psi_l,$$

so sei $A \gtrless A'$, je nachdem $A - A' \gtrless 0$. Dann erkennt man leicht die Beziehungen: Aus $A > 0$, $A' > 0$ folgt $A + A' > 0$, $AA' > 0$. Das erste ist trivial, das zweite folgt aus der Tatsache, daß das Vorzeichen von

$$AA' = \sum_{\substack{i=1,\ldots,h \\ k=1,\ldots,l}} r_i r'_k u^{\varphi_i + \psi_k}$$

bestimmt wird durch das Glied $u^{\varphi_1 + \psi_1}$, das mit dem positiven Koeffizienten $r_1 r'_1$ versehen ist.

Die rationalen Funktionen

$$Z_1 = \frac{A}{A'}, \quad Z_2 = \frac{B}{B'}$$

(B, B' usw. bezeichnen Elemente vom selben Typ wie A, A') ordnen wir gemäß

$$Z = \frac{C}{C'} \gtrless 0,$$

je nachdem $CC' \gtrless 0$, und $Z_1 \gtrless Z_2$, je nachdem $Z_1 - Z_2 \gtrless 0$. Dann folgt aus $Z_1 > 0$, $Z_2 > 0$ auch $Z_1 + Z_2 > 0$, denn es ist

$$Z_1 + Z_2 = \frac{A}{A'} + \frac{B}{B'} = \frac{AB' + A'B}{A'B'}$$

und

$$(AB' + A'B)\, A'B' = AA'B'^2 + BB'A'^2 > 0$$

wegen der Monotoniegesetze für die Anordnung der $A, \ldots$ und der Voraussetzung $AA' > 0$ und $BB' > 0$.

2. *Anordnung der Elemente von* $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$. Die in § 1 mit R_{ik} bezeichneten Elemente sind die soeben mit Z bezeichneten Elemente. Wir setzen fest:

$$\Omega = \sum_{\substack{i=N_k,\dots\infty \\ k=M,\dots\infty}} R_{ik}\, a^i b^k \gtrless 0, \text{ je nachdem } R_{N_M\, M} \gtrless 0.$$

Wir nennen $R_{N_M\, M}\, a^{N_M} b^M$ das Hauptglied von Ω. Es sei

$$\Omega \gtrless \Omega', \quad \text{je nachdem} \quad \Omega - \Omega' \gtrless 0.$$

Daß aus $\Omega > 0$, $\Omega' > 0$ auch $\Omega + \Omega' > 0$ folgt, ist dann sofort einzusehen.

Die Monotoniegesetze der Multiplikation ergeben sich so: Es sei

$$\Omega = \sum_{\substack{i=N_k,\dots\infty \\ k=M,\dots\infty}} R_{ik}\, a^i b^k > 0, \qquad \Omega' = \sum_{\substack{n=N'_m,\dots\infty \\ m=M',\dots\infty}} \mathsf{P}_{nm}\, a^n b^m > 0.$$

Dann hat $\Omega\Omega'$ nach (6) das Hauptglied

$$R_{N_M\, M} \frac{\sum_l \varrho_l^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\varphi_l^{(N'_{M'},\, M')} \cdot a^{N_M} \cdot b^M}}{\sum_k \varrho_h^{(N'_{M'},\, M')}\, u^{\psi_h^{(N'_{M'},\, M')} \cdot a^{N_M} \cdot b^M}}\, u^{a^{N_M}\, \frac{a^{N'_{M'}}-1}{a-1}\, \frac{a^M-1}{b-1}}\, a^{N_M + N'_{M'}}\, b^{M+M'},$$

dessen Koeffizient positiv ist, weil nach Voraussetzung $R_{N_M\, M} > 0$, $\mathsf{P}_{N'_{M'}\, M'} > 0$, daher auch noch derjenige Bruch, der aus $\mathsf{P}_{N'_{M'}\, M'}$ dadurch hervorgeht, daß man in jedem Glied im Zähler und Nenner im Exponenten von u einen festen Faktor $a^{N_M} b^M$ anfügt; denn die Größenanordnung der Exponenten wird dadurch nicht zerstört. Schließlich ist auch der dritte Faktor im Hauptglied positiv, also auch das Produkt aller drei Faktoren. Folglich ist $\Omega\Omega' > 0$. Ebenso beweist man, daß $\Omega'\Omega > 0$ ist.

3. a) Aus dieser Anordnung des Schiefkörpers $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ folgt dann sofort: In $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ gilt keine Regel von der Form, daß ein festes Polynom in zwei Unbestimmten mit rationalen Koeffizienten identisch in den Unbestimmten gleich Null ist [6]). Dies ist eine Folge der Tatsache, daß in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ die Normalformen $u^\varphi a^\alpha b^\beta$, die zu verschiedenen Potenzprodukten der speziellen Elemente a, b gehören, nichtarchimedisch verschieden sind, so daß keine Linearkombination von ihnen verschwinden kann.

Man kann sogar beweisen: Eine Regel dieser Form gilt in keinem geordneten Schiefkörper, in dem zwei Elemente a, b existieren mit [7])

$$ba \ll ab \tag{7}$$

und

$$a b^{n+1} a^i \gg b a^{i+1} b^n \quad \text{für beliebige ganze positive } i, n. \tag{8}$$

Diese Voraussetzungen sind in $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$ erfüllt wegen

$$ba = uab \ll ab,$$

$$ab^{n+1} a^i = u^{a p_i q_{n+1}} a^{i+1} b^{n+1} \gg u^{p_{i+1} q_1} a^{i+1} b^{n+1} = b a^{i+1} b^n.$$

Aus (7) und (8) folgt nämlich: Verschiedene Potenzprodukte in a und b mit bzw. gleichen Dimensionen in a und b sind nichtarchimedisch verschieden. Daraus folgt dann die Behauptung, da es genügt, sich auf homogene Polynome zu beschränken [8]).

---

[6]) Vgl. die in Anm. [2]) zitierte Arbeit, in der die Frage nach ganzrationalen Rechenregeln in geordneten Schiefkörpern allgemein beantwortet wird.

[7]) Das Zeichen $\gg$ ($\ll$) ist für nichtarchimedisch größer (kleiner) gesetzt.

[8]) Siehe M. Dehn, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme, Math. Annalen **85** (1922), S. 184—194, bes. S. 187.

b) Mit Hilfe ähnlicher Überlegungen beweist man ferner: In einem geordneten Schiefkörper können zwei Elemente w, v, die den Bedingungen

$$2 > w > 1, \quad w - 1 = z, \quad \text{also} \quad 0 < z < 1, \quad \text{und} \quad zv \gg vz$$

genügen, keine Relation erfüllen von der Art, daß ein Potenzprodukt in w, v einem andern solchen Potenzprodukt von bzw. gleichen Dimensionen in w, v gleich ist.

§ 3. Spezialisierungen.

1. Die Untersuchungen von § 1 bieten die Möglichkeit, durch geeignete Spezialisierung der Variablen a, b im Exponenten von u und von u selbst eine große Menge von Schiefkörpern, und zwar auch anordbaren, zu konstruieren [9]).

Das einfachste Beispiel ist der *Schiefkörper von Hilbert.* Man setze u gleich einer rationalen Zahl $\neq 1$, etwa $u = 2$, also

$$u^a = u^{a-1} = u^b = u^{b-1} = 2,$$

und es bleibt der Schiefkörper, erzeugt durch zwei über den rationalen Zahlen transzendente Element a, b mit der erzeugenden Springregel $ba = 2ab$.

2. Setzt man $ba = uab$, u Unbestimmte, und $u^a = u$, $u^b = u$, so resultiert der geordnete Schiefkörper, erzeugt durch zwei Unbestimmte a, b über dem nichtarchimedisch geordneten Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten u als Zentrum. Die erzeugende Springregel ist $ba = uab$, wo u mit a und b vertauschbar ist.

3. α) Im folgenden betrachten wir noch den Fall,

$$u = a \quad (9)$$

[10]). Dabei ergibt sich ein geordneter Schiefkörper, der einen zum freien Ring $\mathfrak{F}$ aus zwei Erzeugenden isomorphen Teilring enthält. Es ist also die Einbettung von $\mathfrak{F}$ in einen geordneten Schiefkörper bereits auf einfachere Weise möglich als in § 1.

Der Ansatz (9) ist ein Spezialfall von

$$u = \mathfrak{P}(a) = r_0 + r_1 a + r_2 a^2 + \cdots \quad (r_i \text{ rational}),$$

den wir hier nicht behandeln wollen (siehe dazu § 4, Nr. 8) [11]).

Vermöge (9) hat man

$$u^{a^n} = a = u^{a^{-n}}, \quad n > 0,$$

und

$$u^b = a^2, \quad u^{b^n} = a^{2^n}, \quad u^{a^m b^n} = a^{2^n} \quad (n \geqq 0, \quad m \text{ ganz}).$$

---

[9]) Z. B. indem man in geeigneter Weise zwischen den a, b, a^{-1}, b^{-1} im Exponenten von u solche Bedingungen festsetzt, daß die $u^{a^\nu b^\mu}$ sich auf endlich viele Elemente reduzieren. Freilich bedarf es zuweilen besonderer Untersuchungen, ob das durch Spezialisierung hervorgegangene System wirklich ein Schiefkörper ist, wie z. B. im folgenden für $u = a$, wo schon die Definition des allgemeinen Elementes abzuändern ist.

[10]) Der Fall $u = a^\nu$ ($\nu = 2, 3, \ldots$) liefert nichts wesentlich Neues. Für den Fall $u = a^{-2}$ siehe I. H. M. Wedderburn, Algebras which do not possess a finite basis, Trans. Amer. Math. Soc. **26**, S. 395—426, insbes. S. 425.

[11]) Der Gedanke, aus zwei Elementen a, b über den rationalen Zahlen einen Schiefring zu konstruieren mit der erzeugenden Springregel

$$ba = (r_1 a + r_2 a^2 + r_3 a^3 + \cdots)\, b,$$

wo die r_i feste rationale Zahlen sind und $r_1 > 0$, stammt von Herrn Köthe (briefliche Mitteilung vom 11. 2. 1934) — Herr Köthe vermutete die Einbettbarkeit des Schiefrings in einen anordbaren Schiefkörper mit Hilfe des Oreschen Regularitätskriteriums; dazu ist die Voraussetzung $r_1 > 0$ wesentlich (vgl. dazu § 4, Nr. 8, wo x und a an Stelle von a und b geschrieben ist. In entsprechender Weise wie dort erledigt sich der Fall, daß in der erzeugenden Springrelation eine beliebige mit a (dort x) beginnende Potenzreihe als Faktor auftritt).

Wir schreiben $a^{\frac{1}{2^n}}$ statt $u^{b^{-n}}$ (dies ist zunächst nur eine Bezeichnung) und haben dann

$$b^n a^m = a^{m2^n} b^n \tag{10}$$

nach Formel (1) in § 1; diese Gleichung gilt auch für $n < 0$, denn man darf mit den Brüchen im Exponenten von a nach den Regeln der Bruchrechnung rechnen: setzt man

$$(u^{b^{-n}})^m = a^{\frac{m}{2^n}},$$

so gilt

$$(u^{b^{-n}})^m (u^{b^{-n}})^{m_1} = (u^{b^{-n}})^{m+m_1} = u^{(m+m_1)b^{-n}} = a^{\frac{m}{2^n}} \cdot a^{\frac{m_1}{2^n}} = a^{\frac{m+m_1}{2^n}},$$

$$\left(a^{\frac{m}{2^n}}\right)^k = a^{\frac{mk}{2^n}}.$$

Es ist also

$$u^{a^m b^n} = a^{2^n}$$

für je zwei ganze n, m. Daher ist nach (1) in § 1 auch Formel (10) richtig.

Die Elemente des Schiefkörpers sind

$$\sum_{m=M}^{\infty}\left(\sum_{n=N_m}^{\infty} r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}}\right) b^m \equiv \sum_{n,m} r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}} b^m \quad (r_{nm} \text{ rational}, \ i_m \text{ ganz} \geqq 0; \ N_m, \ M \text{ ganz} \leqq 0)$$

mit den Verknüpfungsvorschriften

$$\begin{aligned} &\Sigma r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}} b^m + \Sigma \varrho_{nm} a^{\frac{n}{2^{j_m}}} b^m \\ &= \Sigma r'_{nm} a^{\frac{n}{2^{h_m}}} b^m + \Sigma \varrho'_{nm} a^{\frac{n}{2^{h_m}}} b^m = \Sigma (r'_{nm} + \varrho'_{nm}) a^{\frac{n}{2^{h_m}}} b^m, \end{aligned} \tag{11}$$

falls $h_m \geqq i_m, j_m$ (ist $h > i$, so kann man jede Laurent-Reihe von $a^{\frac{1}{2^i}}$ auch als Laurent-Reihe von $a^{\frac{1}{2^h}}$ schreiben), und

$$\sum_{n,m} r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}} b^m \cdot \sum_{k,l} \varrho_{kl} a^{\frac{k}{2^{j_l}}} b^l = \sum_{\substack{n,m \\ k,l}} r_{nm} \varrho_{kl} a^{\frac{n}{2^{i_m}} + \frac{2^m k}{2^{j_l}}} b^{m+l} = \sum_{s,t} \bar{r}_{st} a^{\frac{s}{2^{h_t}}} b^t . \tag{12}$$

Die distributiven Gesetze sind evident, das assoziative Gesetz ist sofort zu verifizieren.

β) Nullteilerfreiheit und Inverse. Man definiere

$$S = \sum_{\substack{n=N_m, \ldots \infty \\ m=M \ , \ldots \infty}} r_{nm} a^{\frac{n}{2^{i_m}}} b^m = 0, \text{ wenn alle } r_{nm} = 0.$$

Ist

$$S' = \sum_{\substack{k=N'_l, \ldots \infty \\ l=M' , \ldots \infty}} \varrho_{kl} a^{\frac{k}{2^{j_l}}} b^l ,$$

so sei $S = S'$, falls $S - S' = 0$.

Ist $S \neq 0$ und $S' \neq 0$, so ist auch $SS' \neq 0$, $S'S \neq 0$. Denn in SS' kommt das Glied $a^{\frac{N_M}{2^{i_M}} + \frac{2^M \cdot N'_{M'}}{2^{j_{M'}}}} b^{M+M'}$ genau einmal vor, versehen mit dem Koeffizienten $r_{N_M M} \cdot \varrho_{N'_{M'} M'}$, in dem nach Voraussetzung beide Faktoren $\neq 0$ sind.

Das Element $r_{00} = 1$, $r_{ik} = 0$ sonst, ist die Haupteinheit. Um bei gegebenem $S \neq 0$ das Element S' aus der Gleichung $SS' = 1$ zu bestimmen, setze man S' mit unbekannten Koeffizienten ϱ_{kl} und unbekannten j_l an und nehme in der üblichen Weise Koeffizientenvergleich vor. Zunächst findet man $M' = -M$, also $l = -M, \ldots$. Die kleinste Potenz von $a^{\frac{1}{2^h}}$, die im Koeffizienten von b^0 vorkommt, muß a^0 sein, also ist

$$\frac{N_M}{2^{i_M}} + \frac{2^M N'_{M'}}{2^{j_{M'}}} = 0.$$

Man setze etwa $j_{M'} = M + i_M$, also $N'_{M'} = -N_M$. Dann ergibt sich rekursiv

$$r_{N_M\, M}\, \varrho_{N'_{M'}\, M'} = 1, \quad \text{daraus} \quad \varrho_{N'_{M'}\, M'};$$

$$r_{N_M\, M}\, \varrho_{N'_{M'+1}\, M'} + r_{N_{M+1}\, M}\, \varrho_{N'_{M'}} = 0, \quad \text{daraus} \quad \varrho_{N'_{M'+1}\, M'};$$

usw. Damit sind alle $\varrho_{kM'}$ für $k = N'_{M'}, \ldots$ bestimmt. Der Koeffizient des zu bestimmenden ϱ ist jedesmal $r_{N_M\, M} \neq 0$.

Zu b^1 hat man den Koeffizienten

$$\sum_{\substack{n=N_{M+1},\ldots\infty \\ k=N'_{M'},\ldots\infty}} r_{n\,M+1}\, \varrho_{kM'}\, a^{\frac{n}{2^{i_{M+1}}} + \frac{2^{M+1}k}{2^{j_{M'}}}} + \sum_{\substack{n'=N_M,\ldots\infty \\ k'=N'_{M'+1},\ldots\infty}} r_{n'M}\, \varrho_{k'\,M'+1}\, a^{\frac{n'}{2^{i_M}} + \frac{2^M k'}{2^{j_{M'+1}}}} = 0.$$

Man bestimme $j_{M'+1}$ und $N'_{M'+1}$ zunächst aus

$$\mu = \frac{N_{M+1}}{2^{i_{M+1}}} - \frac{2^{M+1} N_M}{2^{j_{M'}}} = \frac{N_M}{2^{i_M}} + \frac{2^M N'_{M'+1}}{2^{j_{M'+1}}} \qquad (j_{M'} = M + i_M),$$

indem man etwa setzt $j_{M'+1} = M + \operatorname{Max}\{i_{M+1}, i_M\} = M + d_1$, woraus dann $N'_{M'+1}$ als ganze Zahl bestimmt ist. Es folgt jetzt

$$r_{N_{M+1}\, M+1}\, \varrho_{N'_{M'}\, M'} + r_{N_M\, M}\, \varrho_{N'_{M'+1} M'+1} = 0, \quad \text{daraus} \quad \varrho_{N'_{M'+1} M'+1},$$

usw. Allgemein bestimmt sich $\varrho_{N'_{M'+1}+\lambda\, M'+1}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ aus einer linearen Gleichung, die durch Nullsetzen des Koeffizienten von $a^{\frac{\mu 2^{d_1}+\lambda}{2^{d_1}}}$ entsteht; an dieser Gleichung sind so viele Indizespaare n, k beteiligt, wie der Gleichung $\sigma n + \tau k = \mu 2^{d_1} + \lambda$ genügen, wo σ, τ feste Potenzen $\geqq 0$ von 2 sind, und so viele Indizespaare n', k', wie der Gleichung $\zeta n' + k' = \mu 2^{d_1} + \lambda$ genügen, wo ζ ebenfalls eine feste Potenz $\geqq 0$ von 2 ist. Das ϱ mit dem größten λ-Wert im ersten Index hat stets den Koeffizienten $r_{N_M\, M}$. So fahre man fort. Nullsetzen des Koeffizienten von b^ν $(\nu = 2, 3, \ldots)$ liefert $j_{M'+\nu}$ und $N'_{M'+\nu}$ aus

$$\frac{N_M}{2^{i_M}} + \frac{2^M N'_{M'+\nu}}{2^{j_{M'+\nu}}} = \operatorname{Min}\left\{\left(\frac{N_{M+\nu}}{2^{i_{M+\nu}}} + \frac{2^{M+\nu} N'_M}{2^{j_{M'}}}\right), \ldots, \left(\frac{N_{M+1}}{2^{i_{M+1}}} + \frac{2^{M+1} N'_{M'+\nu-1}}{2^{j_{M'+\nu-1}}}\right)\right\}.$$

Ist also etwa $j_{M'+\nu} = M + \operatorname{Max}\{i_M, i_{M+1}, \ldots, i_{M+\nu}\} = M + d_\nu$, dann wird $N'_{M'+\nu}$ eine ganze Zahl. Aus dem sich jetzt durch Koeffizientenvergleich nach Potenzen von $a^{\frac{1}{2^{d_\nu}}}$ ergebenden Gleichungssystem bestimmen sich rekursiv für laufendes k die Koeffizienten $\varrho_{k\, M'+\nu}$. — In analoger Weise löst man die Gleichung $SS' = 1$ bei gegebenem $S' \neq 0$, unbekannt sind dann die r_{nm} und i_m.

Es existiert also mindestens eine Rechts- und eine Linksinverse; Eindeutigkeit und Gleichheit beider Inversen folgen dann wie früher.

γ) Wir behaupten:

In dem durch (9) *bestimmten Schiefkörper erzeugen die Elemente*

$$\xi = e^a \equiv 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots, \qquad \eta = b$$

einen zu $\mathfrak{F}$ *isomorphen Unterring.*

Man hat nämlich

$$P = \xi^{\alpha_1}\eta^{\beta_1} \ldots \xi^{\alpha_k}\eta^{\beta_k} = e^{\alpha_1 a + \alpha_2 a^{2\beta_1} + \alpha_3 a^{2\beta_1+\beta_2} + \cdots + \alpha_k a^{2\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k-1}}} \cdot b^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k},$$

$$\alpha_1 \geqq 0,\ \beta_k \geqq 0, \quad \text{sonst alle Exponenten} > 0.$$

Formal verschiedene P haben verschiedene Normalformen im Schiefkörper, denn aus

$$e^{\alpha_1 a + \alpha_2 a^{2\beta_1} + \cdots + \alpha_k a^{2\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{k-1}}} \cdot b^{\beta_1+\cdots+\beta_k} = e^{\alpha_1' a + \alpha_2' a^{2\beta_1'} + \cdots + \alpha_l' a^{2\beta_1'+\cdots+\beta_{l-1}'}} \cdot b^{\beta_1'+\cdots+\beta_l'}$$

folgt $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k = \beta_1' + \beta_2' + \cdots + \beta_l'$. Die Gleichheit zweier Elemente im Schiefkörper ist eine Identität in b und a. Gilt aber identisch in a

$$e^{Q(a)} = e^{Q'(a)},$$

wo Q, Q' Polynome in a mit positiven Koeffizienten ohne konstantes Glied sind, so folgt

$$Q(a) \equiv Q'(a).$$

Denn wäre $Q(a) \not\equiv Q'(a)$, so sei die Bezeichnung so gewählt, daß $Q - Q' > 0$ für alle $a > \omega > 0$. Dann liefert die Gleichung

$$e^{Q-Q'} = 1$$

für $a \to \infty$ einen Widerspruch, also folgt $l = k$, $\alpha_i = \alpha_i'$, $\beta_i = \beta_i'$.

Es folgt weiter: Formal verschiedene Potenzprodukte P_i in ξ und η sind im Schiefkörper über den rationalen Zahlen linear unabhängig. Zunächst kann eine solche Abhängigkeit nur zwischen solchen P_i bestehen, die in η dieselbe Exponentensumme haben, dann bleibt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{Q_i(a)} = 0$$

identisch in a, wo die Q_i formal verschiedene Polynome in a ohne konstantes Glied sind. Unter diesen Polynomen gibt es genau ein „größtes", etwa Q_1, so daß für alle hinreichend großen positiven a

$$Q_1 - Q_k > 0 \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

ist. Die Gleichung

$$c_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i\, e^{Q_i - Q_1} = 0$$

liefert für $a \to \infty$ dann $c_1 = 0$.

Um endlich zu zeigen, daß ξ, η einen zu $\mathfrak{F}$ isomorphen Ring erzeugen, genügt es zu bemerken, daß die Normalform des Produktes zweier P_i gleich dem Produkt der Normalformen der beiden P_i ist.

δ) Anordnung. Sei

$$S = \sum_{\substack{n = N_m, \ldots \infty \\ m = M, \ldots \infty}} r_{nm}\, a^{\overline{2^{\overline{m}}}^{n}} b^m, \qquad r_{N_M\, M} \neq 0.$$

Dann setzen wir $S \gtrless 0$, je nachdem $r_{N_M\, M} \gtrless 0$, und $S \gtrless S'$, falls $S - S' \gtrless 0$.

Wir nennen $r_{N_M\, M} \cdot a^{\frac{N_M}{2^j M}} \cdot b^M$ das *Hauptglied* von S. Dann gilt ersichtlich mit $S > 0$, $S' > 0$ auch $S + S' > 0$, wo etwa

$$S' = \sum_{\substack{k=N'_l, \ldots \infty \\ l=M', \ldots \infty}} \varrho_{kl} a^{\frac{k}{2^j l}} b^l, \qquad \varrho_{N'_{M'}\, M'} \neq 0.$$

Denn das Hauptglied der Summe hat einen Koeffizienten, der nicht kleiner ist als der Koeffizient im Hauptglied eines der beiden Summanden.

Ferner gilt: Aus $S > 0$, $S' > 0$ folgt $SS' > 0$ und $S'S > 0$. Denn SS' hat das Hauptglied

$$r_{N_M\, M}\, \varrho_{N'_{M'}\, M'}\, a^{\frac{N_M}{2^j M} + \frac{N'_{M'} 2^M}{2^j M'}}\, b^{M+M'},$$

und dieser Ausdruck ist positiv, weil $r_{N_M\, M} > 0$, $\varrho_{N'_{M'}\, M'} > 0$. In dieser Anordnung ist insbesondere $b \ll a$, $ba = a^2 b \ll ab$,

$$\xi = e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots, \qquad \text{also offenbar } 2 > \xi > 1.$$

Wir können daher den Satz aus § 2, Nr. **3** b) auf die Elemente $w = \xi$ und $v = b = \eta$ anwenden; man hat nämlich $w - 1 = z = a + \frac{a^2}{2!} + \cdots$ und

$$zv = ab + \frac{a^2 b}{2!} + \frac{a^3 b}{3!} + \cdots$$

$$vz = ba + \frac{ba^2}{2!} + \frac{ba^3}{3!} + \cdots = a^2 b + \frac{a^4 b}{2!} + \frac{a^6 b}{3!} + \cdots,$$

also

$$zv \gg vz.$$

Aus unserem Satz folgt dann, daß zwei formal verschiedene Potenzprodukte gleicher Dimension in w, v bzw. ξ, η im Schiefkörper verschieden sind. Freilich liefert diese Größenbetrachtung darüber hinaus nicht noch eine Aussage über die lineare Unabhängigkeit der P, und erst recht nicht von solchen P, die nicht alle gleicher Dimension sind.

§ 4. Einbettung des Gruppenrings der metabelschen Gruppe in einen Schiefkörper mit endlich vielen Parametern.

1. Der Schiefkörper $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$, in den wir den Gruppenring der metabelschen Gruppe eingebettet haben, wurde durch unendlich viele Symbole, nämlich a, b und $v_{\nu\mu} = u^{a^\nu b^\mu}$ ($\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) erzeugt. Wir zeigen jetzt, daß man $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ auch in einen anordbaren Schiefkörper einbetten kann, dessen Basiselemente aus einer *festen Anzahl von Unbestimmten* (nämlich drei) und deren Reziproken multiplikativ komponiert sind, falls man als Zentrum einen geeigneten Körper wählt. Man kann dann freilich nicht verlangen, daß wie bei Hilbert der Kommutator von zwei erzeugenden Unbestimmten ein Zentrumselement ist (bei Hilbert hat man $bab^{-1} a^{-1} = 2$).

2. Wir machen zunächst folgende heuristische Überlegung: Seien $g(x)$ und $h(x)$ zwei mit x beginnende Potenzreihen mit Koeffizienten aus einem beliebigen abstrakten

Körper. Sei

$$g(h(x)) = h(g(x)) \quad \text{identisch in } x.$$

Dann folgt

$$g_\nu(h_\mu(x)) = h_\mu(g_\nu(x)) \text{ identisch in } x,$$

wo rekursiv definiert ist

$$\begin{gathered} g = g_1, \quad h = h_1, \\ g_\nu(g_1(x)) = g_{\nu+1}(x), \quad h_\nu(h_1(x)) = h_{\nu+1}(x), \\ g_{-\nu}(g_{-1}(x)) = g_{-(\nu+1)}(x), \quad h_{-\nu}(h_{-1}(x)) = h_{-(\nu+1)}(x) \end{gathered}$$

und

$$\begin{aligned} g_1(g_{-1}(x)) &= x = g_{-1}(g_1(x)) = g_0(x), \\ h_1(h_{-1}(x)) &= x = h_{-1}(h_1(x)) = h_0(x). \end{aligned}$$

Dabei sind $g_\nu(x)$, $h_\mu(x)$ wieder Potenzreihen in x, die mit x beginnen; ebenso beginnen die sämtlichen Iterierten $g_\nu(h_\mu(x))$ mit x.

Wir setzen im Anschluß an § 1

$$(13) \qquad \begin{cases} u = 1 + x, \quad u^a = 1 + g(x), \quad u^b = 1 + h(x), \\ u^{a^\nu b^\mu} = 1 + g_\nu(h_\mu(x)) \qquad (\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ u^\varphi = \prod_{\substack{i=n,\ n+1,\dots,N \\ j=m,\ m+1,\dots,M}} (1 + g_i(h_j(x)))^{\gamma_{ij}}, \end{cases}$$

wo

$$\varphi = \sum_{\substack{i=n,\dots,N \\ j=m,\dots,M}} \gamma_{ij}\, a^i b^j \qquad (\gamma_{ij} \text{ ganz}, \ n, N, m, M \text{ ganz} \gtreqless 0).$$

Wir lassen also jedem Element der metabelschen Gruppe $\mathfrak{M}$, geschrieben mit Hilfe der symbolischen Potenzen, d. h. $u^\varphi a^\alpha b^\beta$, eindeutig einen Ausdruck $F(x)\, a^\alpha b^\beta$ entsprechen, wo $F(x)$ eine Potenzreihe in x ist, beginnend mit x^0. Jedem Element des Rings $\mathfrak{R}_\mathfrak{M}$ lassen wir die Summe der Ausdrücke $F(x)\, a^\alpha b^\beta$, versehen mit rationalen Koeffizienten, entsprechen, das ist ein Ausdruck $\Sigma \Psi_{ik}(x)\, a^i b^k$, summiert über endlich viele i, k; dabei ist Ψ_{ik} eine Potenzreihe in x, versehen mit Koeffizienten aus dem Körper der Koeffizienten von g und h. Wir versuchen jetzt, mit x, a, b als erzeugenden Unbestimmten einen Schiefring über einem geeigneten Zentrum so zu konstruieren, daß er einen zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{M}$ isomorphen Teilring enthält und sich in einen geordneten Schiefkörper einbetten läßt.

3. Wir betrachten jetzt als *allgemeines Ringelement* den Ausdruck

$$(14) \qquad \sum_{l=L}^{\infty} \left[\sum_{k=M_l}^{\infty} \left(\sum_{i=N_{kl}}^{\infty} r_{ikl}\, x^i \right) a^k \right] b^l \qquad (L, M_l, N_{kl} \gtreqless 0, \text{ ganz}).$$

r_{ikl} sei Zentrumselement. Wir schreiben für diese dreifache Summe im folgenden kurz

$$\sum_{i,k,l} r_{ikl}\, x^i a^k b^l.$$

Die Rechenregeln sind in diesem Ring geeignet zu definieren (siehe Nr. **4**). Wir bezeichnen den Ring mit $\mathfrak{S}^*$. Er enthält offenbar dann einen zu $\mathfrak{R}_\mathfrak{M}$ isomorphen Teilring, wenn die oben eingeführten Ausdrücke $F(x) a^\alpha b^\beta$, die den Elementen von $\mathfrak{M}$ zugeordnet sind, in $\mathfrak{S}^*$ über dem Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind. Setzt man in $\mathfrak{S}^*$ ein Element dann gleich 0, wenn alle $r_{ikl} = 0$, so ist für die lineare Unabhängigkeit notwendig und hinreichend, daß die Funktionen $1 + g_\nu(h_\mu(x))$ (ν, μ ganz) zu je endlich vielen über den rationalen Zahlen algebraisch unabhängig sind oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß die $g_\nu(h_\mu(x))$ zu je endlich vielen algebraisch unabhängig sind. Es ist

nicht gelungen, dieser Forderung durch geeignete Wahl von zwei Potenzreihen g, h mit rationalen Koeffizienten zu genügen.

Wir wählen als Rationalitätsbereich den Körper der rationalen Funktionen zweier Unbestimmten y, z und setzen

$$(15) \qquad \begin{cases} g(x) = \sin(z \arcsin x) = zx + \cdots, \\ h(x) = \sin(y \arcsin x) = yx + \cdots, \end{cases}$$

wo die Funktionszeichen abkürzend für die Reihenentwicklungen gesetzt sind. Die Koeffizienten in g bzw. h sind rationale Funktionen von z bzw. y.

Man findet

$$(16) \quad g_\nu(h_\mu(x)) = \sin(z^\nu y^\mu \arcsin x) = h_\mu(g_\nu(x)) = H_{\nu\mu} \qquad (\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Diese Funktionen sind in der Tat über den rationalen Zahlen algebraisch unabhängig, das heißt: ein Polynom in endlich vielen $H_{\nu\mu}$ mit rationalen Koeffizienten kann nicht identisch in x, y, z verschwinden. Sei ähnlich das Polynom

$$(17) \qquad P(\sin(z^\nu y^\mu \arcsin x)) = 0.$$

Die linke Seite ist eine Potenzreihe in x; x sei eine komplexe Variable und ferner

$$(18) \qquad x = \sin i\tau$$

gesetzt, wo τ ein so kleines reelles Intervall $0 \leqq \tau \leqq t$ durchlaufe, daß beständig $|\sin i\tau| < 1$ ist. Durch die Substitution (18) geht dann die linke Seite von (17) in eine Potenzreihe in τ über, die für alle Werte des obigen Intervalls verschwindet, nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie also identisch verschwindet. Man hat daher identisch in τ

$$P(\sin z^\nu y^\mu i\tau) = 0$$

oder

$$P\left(\frac{e^{-z^\nu y^\mu \tau} - e^{z^\nu y^\mu \tau}}{2i}\right) = 0.$$

Daraus folgt aber identisch in τ

$$Q(e^{z^\nu y^\mu \tau} - e^{-z^\nu y^\mu \tau}) = 0,$$

wo Q ein Polynom mit rationalen Koeffizienten ist, oder ausgerechnet

$$Q(e^{z^\nu y^\mu \tau}) + Q_1 = \sum_{l=1}^{n} c_l e^{\chi_l \tau} + Q_1 = 0,$$

wo $\lim_{\tau \to \infty} \frac{Q_1}{Q} = 0$ ist und χ_l lauter formal verschiedene Polynome in z, z^{-1}, y, y^{-1} mit ganzen Koeffizienten sind und nicht alle c_l verschwinden, falls nicht in Q alle Koeffizienten Null sind. Jetzt trage man für z und y algebraisch unabhängige transzendente Zahlen ein, dann nehmen die χ_l lauter verschiedene numerische Werte an, woraus man nach Division mit Q durch den Grenzübergang $\tau \to \infty$ schließt, daß alle c_l verschwinden müssen.

4. Wir verstehen jetzt unter den r_{ikl} in (14) aus Nr. **3** rationale Funktionen der kommutativen Unbestimmten y, z und definieren in $\mathfrak{S}^*$ folgende *Rechenoperationen*: Ist

$$U = \sum_{i,k,l} r_{ikl} x^i a^k b^l, \quad V = \sum_{j,n,m} \varrho_{jnm} x^j a^n b^m,$$

so sei

$$(19) \qquad U + V = \sum_{i,k,l} (r_{ikl} + \varrho_{ikl}) x^i a^k b^l$$

(die Indizes an den Koeffizienten r, ϱ laufen von einer ganzen Zahl $\gtrless 0$ bis ∞) und

$$(20) \quad UV = \sum_{\substack{i,k,l \\ j,n,m}} r_{ikl} \varrho_{jnm} x^i (h_l(g_k(x)))^j \prod_{s,t} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{\varepsilon_l \varepsilon_n} a^{k+n} b^{l+m},$$

$$s = \frac{\varepsilon_n - 1}{2}, \frac{\varepsilon_n - 1}{2} + \varepsilon_n, \ldots, \frac{(2|n| - 1)\varepsilon_n - 1}{2}, \quad n = \varepsilon_n |n| \text{ [12]}$$
$$t = \frac{\varepsilon_l - 1}{2}, \frac{\varepsilon_l - 1}{2} + \varepsilon_l, \ldots, \frac{(2|l| - 1)\varepsilon_l - 1}{2}, \quad l = \varepsilon_l |l|.$$

Die distributiven Gesetze sind dann evident. Das assoziative Gesetz der Multiplikation folgt daraus, daß die Basiselemente $x^i a^k b^l$ sich assoziativ multiplizieren: Die Relation

$$[(x^i a^k b^l)(x^j a^n b^m)](x^\mu a^\nu b^\lambda) = (x^i a^k b^l)[(x^j a^n b^m)(x^\mu a^\nu b^\lambda)]$$

führt auf

$$\begin{aligned} &x^i (h_l(g_k(x)))^j \prod_{s,t} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{\varepsilon_l \varepsilon_n} (h_{l+m}(g_{k+n}(x)))^\mu \prod_{\sigma,\tau} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{\varepsilon_{l+m}\varepsilon_\nu} \\ &= x^i (h_l(g_k(x)))^j \prod_{\sigma,\beta} (1 + g_{n+k+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{\varepsilon_m \varepsilon_\nu} \left(h_m(g_n(h_l(g_k(x))))\right)^\mu \prod_{\gamma,t} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{\varepsilon_l \varepsilon_{\nu+n}}, \end{aligned} \tag{21}$$

wo s, t wie oben variieren und

$$\sigma = \frac{\varepsilon_\nu - 1}{2}, \frac{\varepsilon_\nu - 1}{2} + \varepsilon_\nu, \ldots, \frac{(2|\nu| - 1)\varepsilon_\nu - 1}{2},$$
$$\tau = \frac{\varepsilon_{l+m} - 1}{2}, \frac{\varepsilon_{l+m} - 1}{2} + \varepsilon_{l+m}, \ldots, \frac{(2|m+l| - 1)\varepsilon_{m+l} - 1}{2},$$
$$\beta = \frac{\varepsilon_m - 1}{2}, \frac{\varepsilon_m - 1}{2} + \varepsilon_m, \ldots, \frac{(2|m| - 1)\varepsilon_m - 1}{2},$$
$$\gamma = \frac{\varepsilon_{n+\nu} - 1}{2}, \frac{\varepsilon_{n+\nu} - 1}{2} + \varepsilon_{n+\nu}, \ldots, \frac{(2|n+\nu| - 1)\varepsilon_{n+\nu} - 1}{2},$$
$$\nu = \varepsilon_\nu |\nu|, \; m + l = \varepsilon_{m+l} |m + l|, \; m = \varepsilon_m |m|, \; n + \nu = \varepsilon_{n+\nu} |n + \nu|.$$

Zur Herleitung der rechten Seite von (21) beachte man, daß aus (20) folgt

$$b^l \Phi(x) = \Phi(h_l(x)) b^l, \quad a^k \Phi(x) = \Phi(g_k(x)) a^k,$$
$$b^l a^n = \prod_{s,t} (1 + g_s(h_t(x)))^{\varepsilon_l \varepsilon_n} a^n b^l,$$

wo k, l, n ganz sind und $\Phi(x)$ eine Laurent-Reihe mit endlich vielen negativen Potenzen bedeutet.

Nun ist aber

$$h_m(g_n(h_l(g_k(x)))) = h_{m+l}(g_{n+k}(x)),$$

also hat man nach Entfernung gleicher Faktoren in (21) zu beweisen

$$\begin{aligned} &\prod_{s,t} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{\varepsilon_l \varepsilon_n} \prod_{\sigma,\tau} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{\varepsilon_{l+m}\varepsilon_\nu} \\ &= \prod_{\sigma,\beta} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{\varepsilon_m \varepsilon_\nu} \prod_{\gamma,t} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{\varepsilon_{n+\nu}\varepsilon_l}. \end{aligned} \tag{22}$$

Zum Beweis von (22) hat man verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem die ε gleich $+1$ oder gleich -1 sind. Es genügt, einige Fälle durchzuführen, die übrigen erledigen sich entsprechend.

a) $l, m, n, k, \nu > 0$.

$$\begin{aligned} &\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1 \\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x))) \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1 \\ \tau=0,1,\ldots,l+m-1}} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x))) \\ &= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1 \\ \beta=0,1,\ldots,m-1}} (1 + g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x))) \prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,n+\nu-1 \\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x))) \end{aligned}$$

[12]) Ist also $n > 0$, so ist $s = 0, 1, \ldots, n-1$; ist $n < 0$, so ist $s = -1, -2, \ldots, -|n|$. Für $n = 0$ ($l = 0$) setze man in (20) $\varepsilon_n = 0$ ($\varepsilon_l = 0$).

oder

$$\prod_{\substack{\gamma=n,\ldots,n+v-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+\gamma}(h_t(x)))\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \beta=0,1,\ldots,m-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))=\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=0,1,\ldots,l+m-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x))).$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=l,l+1,\ldots,l+m-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))$$

$$=\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau'=0,1,\ldots,m-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_{l+\tau'}(x)))\prod_{\substack{\sigma'=n,\ldots,n+v-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+\sigma'}(h_t(x))).$$

b) $k, l, n, m > 0,\ v < 0,\ v = -v',\ v' > 0.$

1. Fall: $n - v' < 0.$

$$\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+s}(h_t(x)))\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-v'\\ \tau=0,1,\ldots,l+m-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$=\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-v'\\ \beta=0,1,\ldots,m-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1}\prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(v'-n)\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}$$

oder, wenn man den zweiten Faktor links gemäß

$$\tau = 0, 1, \ldots, l-1; \qquad \tau = l, l+1, \ldots, l+m-1$$

zerlegt,

$$\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+s}(h_t(x)))\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-v'\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}=\prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(v'-n)\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}.$$

Hier ist der zweite Faktor links gleich

$$\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-n\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}\prod_{\substack{\sigma=-(n+1),\ldots,-v'\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$=\prod_{\substack{s=n-1,n-2,\ldots,0\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+s}(h_\tau(x)))^{-1}\prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(v'-n)\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+\gamma}(h_\tau(x)))^{-1};$$

damit ist man fertig.

2. Fall: $n - v' > 0.$

$$\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+s}(h_t(x)))\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-v'\\ \tau=0,1,\ldots,l+m-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$=\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-v'\\ \beta=0,1,\ldots,m-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1}\prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,n-v'-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+\gamma}(h_t(x)))$$

oder

$$\prod_{\substack{s=0,1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+s}(h_t(x)))\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-v'\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}=\prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,n-v'-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+\gamma}(h_t(x)))$$

oder

$$\prod_{\substack{\sigma=-1,-2,\ldots,-v'\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+n+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}\prod_{\substack{s=n-v',n-v'+1,\ldots,n-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}}(1+g_{k+s}(h_t(x)))=1,$$

und das ist richtig.

c) $k, l, v > 0,\ n, m < 0,\ n = -n',\ n' > 0,\ m = -m',\ m' > 0.$

1. Fall: $l - m' > 0$ und $v - n' > 0.$

$$\prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-m'-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \beta=-1,-2,\ldots,-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,v-n'-1\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x))).$$

Nun ist

$$\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-m'-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,n'-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))) \prod_{\substack{\sigma=n',n'+1,\ldots,v-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))) \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=l-m',\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}.$$

Trägt man dies links ein, so hebt sich links das erste gegen das zweite Glied, das dritte Glied links gegen das zweite Glied rechts, das vierte Glied links gegen das erste Glied rechts.

2. Fall: $l - m' > 0$ und $v - n' < 0.$

$$\prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-m'-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \beta=-1,-2,\ldots,-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(n'-v)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-(n'-v)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{s=-(n'-v)-1,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1}$$

$$\cdot \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))) \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=l-m',l-m'+1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}.$$

Jetzt hebt sich das erste Glied links gegen das zweite Glied rechts, das zweite Glied links gegen das dritte Glied links, das vierte Glied links gegen das erste Glied rechts.

3. Fall: $l - m' < 0$ und $v - n' < 0.$

$$\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \beta=-1,-2,\ldots,-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(n'-v)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}$$

$$= \prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=-1,-2,\ldots,-(m'-l)}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$= \prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-(n'-v)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{s=-(n'-v)-1,\ldots,-n'\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1}$$

$$\cdot \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=l-1,\ldots,l-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))).$$

Die linke Seite ist gleich

$$\prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,v-1\\ \beta=l-1,\ldots,l-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\beta(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=-1,-2,\ldots,-(n'-v)\\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x)))^{-1}.$$

Es hebt sich das zweite Glied links gegen das erste rechts, das zweite Glied rechts gegen das vierte rechts, das erste Glied links gegen das dritte rechts.

4. Fall: $l - m' < 0$ und $\nu - n' > 0$.

$$\prod_{\substack{s=-1,-2,\ldots,-n' \\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1 \\ \tau=-1,-2,\ldots,-(m'-l)}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$= \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,\nu-1 \\ \beta=-1,-2,\ldots,-m'}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_{l+\beta}(x)))^{-1} \prod_{\substack{\gamma=0,1,\ldots,\nu-n'-1 \\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+\gamma}(h_t(x))).$$

Die linke Seite ist gleich

$$\prod_{\substack{s=-1,\ldots,-n' \\ t=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k+s}(h_t(x)))^{-1} \prod_{\substack{\sigma=0,\ldots,\nu-1 \\ \tau=l-1,\ldots,0,-1,\ldots,-(m'-l)}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x)))^{-1}$$

$$\cdot \prod_{\substack{\sigma=0,1,\ldots,n-1 \\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))) \prod_{\substack{\sigma=n',\ldots,\nu-1 \\ \tau=0,1,\ldots,l-1}} (1 + g_{k-n'+\sigma}(h_\tau(x))).$$

Es hebt sich das erste Glied links gegen das dritte Glied links, das zweite Glied links gegen das erste rechts, das vierte Glied links gegen das zweite rechts.

5. Die Elemente $U, V, \ldots$ bilden also einen Ring. *Dieser Ring enthält einen zu* $\mathfrak{R}_\mathfrak{M}$ *isomorphen Unterring.* Ordnen wir nämlich dem Element

$$M = \sum_{\nu, n, m} \varrho_{\nu n m} u^{\varphi_\nu} a^n b^m \qquad (\varrho_{\nu n m} \text{ rational})$$

aus $\mathfrak{R}_\mathfrak{M}$ das Element

$$U = \sum_{\nu, n, m} \varrho_{\nu n m} \prod_{\substack{i=k_\nu, k_\nu+1,\ldots,K_\nu \\ j=l_\nu, l_\nu+1,\ldots,L_\nu}} (1 + g_i(h_j(x)))^{\gamma_{ij}^{(\nu)}} a^n b^m$$

zu, wo

$$\varphi_\nu = \sum_{\substack{i=k_\nu,\ldots,K_\nu \\ j=l_\nu,\ldots,L_\nu}} \gamma_{ij}^{(\nu)} a^i b^j$$

gesetzt ist mit ganzen $\gamma_{ij}^{(\nu)}$, so ist diese Abbildung ein Isomorphismus. Zunächst ist dann evident, daß der Summe $M + M'$ die Summe $U + U'$ zugeordnet ist. Ferner hat man

$$M M' = \sum \varrho_{\nu n m} u^{\varphi_\nu} a^n b^m \sum \varrho'_{\mu s t} u^{\varphi_\mu} a^s b^t$$

$$= \sum_{\substack{\nu, n, m \\ \mu, s, t}} \varrho_{\nu n m} \varrho'_{\mu s t} u^{\varphi_\nu + a^n \left(b^m \varphi_\mu + \varepsilon_s \varepsilon_m a^{\frac{\varepsilon_s - 1}{2}} b^{\frac{\varepsilon_m - 1}{2}} p_s q_m \right)} a^{n+s} b^{m+t},$$

$$\psi_\mu = \sum_{\substack{\sigma=k'_\mu,\ldots,K'_\mu \\ \tau=l'_\mu,\ldots,L'_\mu}} \delta_{\sigma\tau}^{(\mu)} a^\sigma b^\tau \qquad (\delta_{\sigma\tau}^{(\mu)} \text{ ganz}).$$

Ist

$$U' = \sum \varrho'_{\mu s t} \prod_{\sigma, \tau} (1 + g_\sigma(h_\tau(x)))^{\delta_{\sigma\tau}^{(\mu)}} a^s b^t,$$

so ist UU' nach (20) das Element

$$\sum_{\substack{\nu, n, m \\ \mu, s, t}} \varrho_{\nu n m} \varrho'_{\mu s t} \Psi(x)\, a^{n+s} b^{m+t},$$

wo gesetzt ist

$$\Psi(x) = \prod_{\substack{i=k_\nu,\ldots,K_\nu \\ j=l_\nu,\ldots,L_\nu}} (1 + g_i(h_j(x)))^{\gamma_{ij}^{(\nu)}} \prod_{\substack{\sigma=k'_\mu,\ldots,K'_\mu \\ \tau=l'_\mu,\ldots,L'_\mu}} (1 + g_{n+\sigma}(h_{\tau+m}(x)))^{\delta_{\sigma\tau}^{(\mu)}} \prod_{\alpha, \beta} (1 + g_{\alpha+n}(h_\beta(x)))^{\varepsilon_m \varepsilon_s}$$

$$\left(\alpha = \frac{\varepsilon_s - 1}{2}, \frac{\varepsilon_s - 1}{2} + \varepsilon_s, \ldots, \frac{(2|s| - 1)\varepsilon_s - 1}{2};\ \beta = \frac{\varepsilon_m - 1}{2}, \frac{\varepsilon_m - 1}{2} + \varepsilon_m, \ldots, \frac{(2|m| - 1)\varepsilon_m - 1}{2} \right).$$

Dieses Element ist gerade dem Produkt MM' zugeordnet, denn $\Psi(x)$ ist

$$u^{\varphi_\nu + a^n b^m \psi_\mu + \varepsilon_s \varepsilon_m a^{n+\frac{\varepsilon_s-1}{2}} b^{\frac{\varepsilon_m-1}{2}} p_s q_m}$$

zugeordnet.

6. *Der Ring $\mathfrak{S}^*$ ist nullteilerfrei.* U, V seien die in Nr. **4** angeschriebenen Elemente aus $\mathfrak{S}^*$, UV ihr Produkt nach (20). Wir setzen ein Element U aus $\mathfrak{S}^*$ gleich Null, wenn alle $r_{ikl} = 0$, und $U = V$, wenn $U - V = 0$.

Es ist dann $UV \neq 0$, wenn $U \neq 0$ und $V \neq 0$. Es ist nämlich das Hauptglied von UV — d. h. das Glied mit der kleinsten Potenz von b, das die kleinste Potenz von a, versehen mit der kleinsten Potenz von x, zum Koeffizienten hat — wegen (20)

$$r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'}L'}\, M'_{L'}\, L'} \cdot z^{M_L \cdot N'_{M'_{L'}L'}} \cdot y^{L \cdot N'_{M'_{L'}L'}} \cdot x^{N_{M_L L} + N'_{M'_{L'}L'}} \cdot a^{M_L + M'_{L'}} \cdot b^{L+L'}.$$

Nach Voraussetzung ist $r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \neq 0$ und $\varrho_{N'_{M'_{L'}L'}\, M'_{L'}\, L'} \neq 0$, also auch

$$r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'}L'}\, M'_{L'}\, L'} \cdot z^{M_L \cdot N'_{M'_{L'}L'}} \cdot y^{L \cdot N'_{M'_{L'}L'}} \neq 0$$

(in U laufen i, k, l bzw. von N_{kl}, M_l, L bis ∞; in V laufen j, n, m bzw. von N'_{nm}, M'_m, L' bis ∞).

7. *Der Schiefring $\mathfrak{S}^*$ ist ein Schiefkörper.* Das Einselement des Rings ist charakterisiert durch $r_{000} = 1$, $r_{ikl} = 0$ sonst (1 ist hierbei die Haupteinheit im Körper der rationalen Funktionen von y und z).

Um die Gleichung

$$UV = 1$$

bei gegebenem U nach V aufzulösen, bedienen wir uns wieder der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Nach (20) aus **4** hat man

$$\sum r_{ikl}\, \varrho_{jnm}\, x^i \left(h_l(g_k(x))\right)^j \prod_{s,t} \left(1 + g_{k+s}(h_t(x))\right)^{\varepsilon_l \varepsilon_n} a^{k+n} b^{l+m} = 1,$$

$i = N_{kl}, \ldots \infty$; $k = M_l, \ldots \infty$; $l = L, \ldots \infty$; $j = N'_{nm}, \ldots \infty$; $n = M'_l, \ldots \infty$; $m = L', \ldots \infty$.
Gesucht sind die ϱ_{jnm}, die r_{ikl} gegeben. Zunächst erkennt man $L' = -L$, also $m = -L, \ldots \infty$, $M'_{L'} = -M_L$; der Koeffizient von $a^0 b^0$ ist eine Laurent-Reihe in x, die genau mit x^0 beginnen muß, also $N'_{M'_{L'}L'} = -N_{M_L L}$ und

$$z^{-M_L \cdot N_{M_L L}} \cdot y^{-L \cdot N_{M_L L}} \cdot r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'}L'}\, M'_{L'}\, L'} = 1 \qquad (r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \neq 0).$$

Die Koeffizienten ϱ mit demselben zweiten und dritten Index, aber größerem ersten Index ergeben sich sukzessive durch Nullsetzen der Koeffizienten der höheren Potenzen von x; $\varrho_{N'_{M'_{L'}L'+\lambda}\, M'_{L'}\, L'}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots$ bestimmt sich linear, und zwar versehen mit dem Koeffizienten

$$z^{(N'_{M'_{L'}L'+\lambda})\, M_L} \cdot y^{(N'_{M'_{L'}L'+\lambda})\, L} \cdot r_{N_{M_L L}},$$

aus den ϱ mit kleinerem ersten Index und den bekannten r_{ikl}. Der Faktor $\prod_{s,t}$ ist nämlich eine Potenzreihe in x, die mit dem absoluten Glied 1 beginnt.

Der Koeffizient von $a^1 b^0$ ist

$$\sum_{\substack{i = N_{M_L+1\, L}, \ldots \infty \\ j = N'_{M'_{L'}L'}, \ldots \infty}} r_{i\, M_L+1\, L} \cdot \varrho_{j\, M'_{L'}\, L'} \cdot x^i \left(h_L(g_{M_L+1}(x))\right)^j \prod_{s,t} \left(1 + g_{M_L+1+s}(h_t(x))\right)^{\varepsilon_L \varepsilon_{M'_{L'}}}$$

$$+ \sum_{\substack{i = N_{M_L L}, \ldots \infty \\ j = N'_{M'_{L'}+1\, L'}, \ldots \infty}} r_{i\, M_L\, L} \cdot \varrho_{j\, M'_{L'}+1\, L'} \cdot x^i \left(h_L(g_{M_L}(x))\right)^j \prod_{s',t} \left(1 + g_{M_L+s'}(h_t(x))\right)^{\varepsilon_L \varepsilon_{M'_{L'}+1}} = 0$$

(s, t, s hängen von i und j nicht ab),

also ist $N'_{M'_{L'+1}\,L'} = N_{M_L+1\,L} - 2N_{M_L L}$ und

$$r_{N_{M_L+1\,L}\,M_L+1\,L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'}L'}\,M'_{L'}\,L'} \cdot z^{(M_L+1)N'_{M'_{L'}L'}} \cdot y^{L \cdot N'_{M'_{L'}L'}}$$

$$+ r_{N_{M_L L}\,M_L\,L} \cdot \varrho_{N'_{M'_{L'}+1}\,M'_{L'+1}\,L'} \cdot z^{M_L \cdot N'_{M'_{L'}+1\,L'}} \cdot y^{L \cdot N'_{M'_{L'}+1\,L'}} = 0 \text{ usw.}$$

Dies liefert rekursiv die $\varrho_{i\,M'_{L'+1}\,L'}$ für $i = N'_{M'_{L'+1}\,L'}, \ldots \infty$. In entsprechender Weise bestimmt man die ϱ mit dem dritten Index $-L$, höherem zweiten Index und laufendem ersten Index.

Setzt man dann den Koeffizienten von b^1, darauf den Koeffizienten von b^2 usw. gleich Null und wiederholt jedesmal das Verfahren, so bestimmen sich sukzessive die ϱ mit dem dritten Index $-L+1$, $-L+2$ usw.

In entsprechender Weise löst man die Gleichung $UV = 1$ bei gegebenem V nach U auf.

8. Im Schiefkörper $\mathfrak{S}^*$ erzeugen die Unbestimmten a, b, a^{-1}, b^{-1} einen zu $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}$ isomorphen Ring. Also erzeugen a, b in $\mathfrak{S}^*$ einen zu $\mathfrak{F}$ isomorphen Ring. Indessen besitzt $\mathfrak{S}^*$ auch noch einfachere zu $\mathfrak{F}$ isomorphe Teilringe.

Wir betrachten den *Unterring* in $\mathfrak{S}^*$, gebildet aus allen Elementen

$$T = \sum_{\substack{i=N_k, \ldots \infty \\ k=M, \ldots \infty}} r_{ik}\, x^i a^k, \qquad r_{ik} \text{ rationale Funktion von } z;\ N_k,\ M \gtreqless 0, \text{ ganz.}$$

Die Elemente T bilden sogar einen Unterschiefkörper von $\mathfrak{S}^*$, wie man leicht einsieht. — Man hat mit $g(x) = \sin(z \arcsin x)$ aus (20)

$$\sum_{\substack{i=N_k, \ldots \infty \\ k=M, \ldots \infty}} r_{ik}\, x^i a^k \cdot \sum_{\substack{n=N'_m, \ldots \infty \\ m=M', \ldots \infty}} \varrho_{nm}\, x^n a^m = \sum_{\substack{i,k \\ n,m}} r_{ik}\, \varrho_{nm} (\sin(z^k \arcsin x))^n\, x^i a^{k+m} = \sum_{s,t} r'_{st}\, x^s a^t.$$

Wir behaupten: x und a erzeugen einen zu $\mathfrak{F}$ isomorphen Ring. In der Tat: In $\mathfrak{S}^*$ ist

$$P = a^{\alpha_1} x^{\beta_1} a^{\alpha_1} x^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_k} x^{\beta_k}$$

$$= (\sin(z^{\alpha_1} \arcsin x))^{\beta_1} (\sin(z^{\alpha_1+\alpha_2} \arcsin x))^{\beta_2} \ldots (\sin(z^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k} \arcsin x))^{\beta_k}\, a^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}$$

$$\alpha_1 \geqq 0,\ \beta_k \geqq 0; \qquad \alpha_i > 0,\ \beta_i > 0 \text{ sonst.}$$

In $\mathfrak{S}^*$ haben formal verschiedene P verschiedene Normalformen, denn aus

$$(\sin(z^{\alpha'_1} \arcsin x))^{\beta'_1} \ldots (\sin(z^{\alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_l} \arcsin x))^{\beta'_l}\, a^{\alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_l}$$

$$= (\sin(z^{\alpha_1} \arcsin x))^{\beta_1} \ldots (\sin(z^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k} \arcsin x))^{\beta_k}\, a^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}$$

folgt $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_l = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$, und weiter, da die Funktionen $\sin(z^\nu \arcsin x)$ über den rationalen Zahlen algebraisch unabhängig sind, sukzessive

$$\beta'_l = \beta_k, \quad \alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_{l-1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1}, \quad \beta'_{l-1} = \beta_{k-1}, \ldots$$

also

$$l = k, \quad \alpha_i = \alpha'_i, \quad \beta_i = \beta'_i.$$

Ferner sind in $\mathfrak{S}^*$ je endlich viele formal verschiedene P über den rationalen Zahlen algebraisch unabhängig nach demselben Schluß wie soeben. — Endlich erkennt man sofort, daß die Zuordnung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu P_\nu \to \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu (\sin(z^{\alpha_1^{(\nu)}} \arcsin x))^{\beta_1^{(\nu)}} \ldots (\sin(z^{\alpha_1^{(\nu)}+\cdots+\alpha_k^{(\nu)}} \arcsin x))^{\beta_{k_\nu}^{(\nu)}}\, a^{\alpha_1^{(\nu)}+\cdots+\alpha_{k_\nu}^{(\nu)}}$$

$$(P_\nu = a^{\alpha_1^{(\nu)}} x^{\beta_1^{(\nu)}} \ldots a^{\alpha_{k_\nu}^{(\nu)}} x^{\beta_{k_\nu}^{(\nu)}}, \quad \varrho_\nu \text{ rational})$$

ein Isomorphismus ist wegen der in $\mathfrak{S}^*$ gültigen Multiplikationsvorschrift.

§ 5. Anordnung im Schiefkörper $\mathfrak{S}^*$.

1. Wir ordnen zunächst die rationalen Funktionen von z, y in der bekannten Weise. Für die Polynome in z, y mit rationalen Koeffizienten setzen wir fest: $R \gtrless 0$, je nachdem die kleinste vorkommende Potenz in y als Faktor ein Polynom in z hat, dessen kleinste vorkommende Potenz von z einen Koeffizienten $\gtrless 0$ hat. Es sei $R \gtrless R'$, falls $R - R' \gtrless 0$. Diese Festsetzung ist eindeutig, transitiv und genügt den Monotoniegesetzen der Addition und Multiplikation.

Die rationalen Funktionen ordnen wir dann so, daß

$$\frac{R}{R'} \gtrless 0, \quad \text{falls} \quad RR' \gtrless 0$$

und

$$\frac{R_1}{R_1'} \gtrless \frac{R_2}{R_2'}, \quad \text{falls} \quad \frac{R_1}{R_1'} - \frac{R_2}{R_2'} \gtrless 0.$$

Man beweist dann leicht, daß diese Festsetzungen eine eindeutige, transitive und den Monotoniegesetzen genügende Anordnung liefern.

2. Jetzt kann man die Elemente von $\mathfrak{S}^*$ in der folgenden Weise ordnen: Es sei

$$U = \sum_{i,k,l} r_{ikl} x^i a^k b^l \gtrless 0,$$

je nachdem im Hauptglied (s. S. 221) $r_{N_{M_L L}\, M_L\, L}\, x^{N_{M_L L}} a^{M_L} b^L$ der Koeffizient $r_{N_{M_L L}\, M_L\, L} \gtrless 0$ ist; r_{ikl} ist eine rationale Funktion von z, y. Nun sei $U \gtrless V$, je nachdem $U - V \gtrless 0$. Diese Festsetzung liefert eine eindeutige und transitive Anordnung, weil die Anordnung der r_{ikl} diese Eigenschaften hat. Daß ferner aus $U > 0$, $V > 0$ auch $U + V > 0$ folgt, ist evident, denn der Koeffizient im Hauptglied der Summe ist nicht kleiner als der Koeffizient in den Hauptgliedern der Summanden. Aus $U > 0$, $V > 0$ folgt auch $UV > 0$, $VU > 0$, denn der Koeffizient des Hauptgliedes des Produktes ist nach § 4, Nr. **6**, abgesehen von einer Potenz von z und y, gleich dem Produkt der Koeffizienten in den Hauptgliedern der Faktoren.

Eingegangen 13. August 1936.

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. I.

Von *Walter Neumer* in Worms.

Vorbemerkung.

Weiß man von einer vorgelegten Differentialgleichung, daß sie durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher auf einfachere Form gebracht werden kann, so ist damit für ihre Integration ein wesentlicher Anhaltspunkt gegeben. Zu seiner praktischen Verwertung ist jedoch noch die Lösung des weiteren Problems erforderlich, eine solche, als *möglich* erkannte, vereinfachende Variablen-Transformation auch wirklich aufzufinden. Lie hat in seinen gruppentheoretischen Untersuchungen die allgemeingültigen Perspektiven eröffnet, durch deren Verfolgung eine Klassifizierung und Charakterisierung der Differentialgleichungen sowie ihre Reduktion auf kanonische Typen erreicht werden können. Einen Beitrag in dieser Richtung will die vorliegende Arbeit leisten, indem sie die Kriterien für die gewöhnlichen Differentialgleichungen 3. und 4. Ordnung aufstellt, welche sich durch Punkt- oder Berührungs-Transformationen in lineare homogene Form überführen lassen. Das Problem dieser Überführung selbst muß späteren Untersuchungen zur Behandlung vorbehalten bleiben.

Erster Abschnitt.

Über die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die durch Punkt-Transformationen lineare homogene Form annehmen können.

§ 1. Orientierende Betrachtungen.

1. Die allgemeine Form der gewöhnlichen Differentialgleichungen (Diffgl.n) n-ter O., welche durch Punkt-Transformation (P. T.) auf lineare homogene Form gebracht werden können, erhalten wir, indem wir die allgemeinste P. T.

$$(1) \quad (a)\ \mathfrak{x} = X(x, y),\ \mathfrak{y} = Y(x, y), \quad (b)\ D = X_x Y_y - X_y Y_x \neq 0$$

auf die allgemeine lineare homogene Diffgl.

$$(2) \qquad \mathfrak{y}^{(n)} - a_{n-1}(\mathfrak{x})\,\mathfrak{y}^{(n-1)} - \cdots - a_1(\mathfrak{x})\mathfrak{y}' - a_0(\mathfrak{x})\mathfrak{y} = 0$$

ausüben. Zunächst wollen wir nun fragen, welche P. T.n die Diffgl. (2) wieder in eine lineare homogene Diffgl. überführen. Man hat die Formeln

$$(3) \qquad \mathfrak{y}' = \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \frac{Y_y y' + Y_x}{X_y y' + X_x}$$

$$(3')\qquad \begin{cases} \mathfrak{y}'' = \dfrac{Dy'' + G(y')}{(X_y y' + X_x)^3}, \\ \mathfrak{y}^{(i)} = \dfrac{1}{(X_y y' + X_x)^{i+1}}\left(Dy^{(i)} - \dfrac{m_i X_y D y'' y^{(i-1)}}{X_y y' + X_x} + \dfrac{G(y')\, y^{(i-1)} + G(y', \ldots, y^{(i-2)})}{(X_y y' + X_x)^{i-2}}\right) \\ \qquad\qquad (i = 3, 4, \ldots), \end{cases}$$

unter G eine ganze rationale Funktion ihrer Argumente und unter den m_i gewisse natürliche Zahlen verstanden. Setzt man die Werte (3) und (3′) in (2) ein, so entsteht für $n > 2$ eine Diffgl., in welcher ein Glied mit $y'' y^{(n-1)}$ auftritt, herrührend von der Formel (3′) für $i = n$; nur wenn $X_y = 0$, tritt dieses Glied nicht in Erscheinung. An diesem Umstand ändert sich nichts, wenn wir allgemeiner die ursprüngliche Diffgl. lediglich als linear voraussetzen. Für $X_y = 0$ wird (3), (3′)

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{y}' = \dfrac{Y_y y' + Y_x}{X_x}, \quad \mathfrak{y}'' = \dfrac{Y_y y'' + Y_{yy} y'^2}{X_x^2} + \dfrac{L(y')}{X_x^3}, \\ \mathfrak{y}^{(i)} = \dfrac{1}{X_x^i}\left(Y_y y^{(i)} + i Y_{yy} y' y^{(i-1)} + \dfrac{F(x, y)\, y^{(i-1)} + G(y', \ldots, y^{(i-2)})}{X_x^{i-1}}\right) \\ \qquad\qquad (i = 3, 4, \ldots), \end{cases}$$

unter L eine lineare Funktion verstanden. Aus einer linearen Diffgl. bekommen wir vermöge der Formeln (4) eine Diffgl., in der ein Glied mit $y' y^{(n-1)}$ vorkommt, herrührend von der Formel (4) für $i = n$. Dies kann nur dann vermieden werden, wenn $Y_{yy} = 0$. Es ist andererseits ohne weiteres zu erkennen, daß eine Transformation (Trf.) der Gestalt

$$(5)\qquad \mathfrak{x} = X(x), \quad \mathfrak{y} = \Phi(x) y + \Psi(x)$$

jede gewöhnliche lineare Diffgl. wieder in eine lineare verwandelt.

Verlangen wir nun überdies, daß die Trf. (5) die Diffgl. (2) wieder in eine lineare *homogene* Diffgl. überführt, dann ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Funktion $\Psi(\bar{X}(\mathfrak{x}))$ eine Lösung von (2) darstellt; dabei bedeutet $x = \bar{X}(\mathfrak{x})$ die Auflösung der ersten Gleichung (5) nach x. Wir haben also insgesamt den Satz:

Satz 1. *Die allgemeinste P. T., welche eine gewöhnliche lineare Diffgl. von höherer als 2. O. wieder in eine lineare verwandelt, besitzt die Gestalt* (5), *und eine Trf. dieser Art gibt jeder gewöhnlichen linearen Diffgl. wieder lineare Form.*

Soll außerdem die Trf. (5) *einer vorgelegten Diffgl.* (2) *ihre Homogenität bewahren, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß sie die Form*

$$(5')\qquad \mathfrak{x} = X(x), \quad \mathfrak{y} = \Phi(x) y + \Omega(X(x))$$

hat, worin $\Omega(\mathfrak{x})$ *die allgemeinste Lösung der Diffgl.* (2) *bedeutet.*

In der Trf. (5′) treten nur *zwei* willkürliche Funktionen auf; es ist also von vornherein unmöglich, eine gewöhnliche lineare homogene Diffgl. von höherer als der 2. O. durch P. T. in eine *beliebig* vorgegebene lineare homogene Diffgl. derselben Ordnung zu überführen. Mithin gibt es *unbegrenzt* viele *Typen* von gewöhnlichen Diffgl.n 3., 4., ... O., die durch P. T. lineare homogene Form erhalten können. Dagegen kann *jede* Diffgl. 2. O.

$$(6)\qquad y'' - \alpha_1(x) y' - \alpha_0(x) y = 0$$

in $\mathfrak{y}'' = 0$ transformiert werden; dies leistet z. B. die Trf.

$$(6')\qquad \mathfrak{x} = \frac{Q_2(x)}{Q_1(x)}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{1}{Q_1(x)}\, y,$$

unter Q_1, Q_2 zwei linear unabhängige Lösungen von (6) verstanden. Die Trf. (6′) verwandelt nämlich die beiden Lösungen $y - Q_1(x) = 0$, $y - Q_2(x) = 0$ in die Lösungen $\mathfrak{y} - 1 = 0$, $\mathfrak{y} - \mathfrak{x} = 0$ der Diffgl. $\mathfrak{y}'' = 0$. *Die gewöhnlichen Diffgl.n 2. O., welche durch P. T. auf lineare homogene Form gebracht werden können, repräsentieren daher einen einzigen Typus.*

Was die gewöhnlichen Diffgl.n 1. O. anbelangt, so ist es bekanntlich möglich, *jede* gewöhnliche Diffgl. 1. O. durch P. T. in *jede beliebige andere* zu überführen.

2. Die lineare homogene Diffgl.

$$(7) \qquad y^{(n)} - \alpha_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} - \cdots - \alpha_1(x)\,y' - \alpha_0(x)\,y = 0$$

bleibt *invariant* gegenüber der $(n+1)$-*gliedrigen Gruppe*

$$(8) \qquad \tilde{x} = x, \qquad \tilde{y} = ay + b_1 Q_1(x) + \cdots + b_n Q_n(x),$$

wo $Q_1, \ldots, Q_n$ ein fundamentales Lösungensystem von (7) darstellt. Diese Gruppe ist *erzeugt* von den *infinitesimalen Trf.n* (inf. Trf.n) [1])

$$(8') \qquad Q_1(x)q, \ldots, Q_n(x)q, \quad yq \qquad \left(q = \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Umgekehrt läßt jede beliebige Gruppe der Form (8) oder (8′) mit linear unabhängigen Funktionen $Q_1, \ldots, Q_n$ diejenige gewöhnliche lineare homogene Diffgl. n-ter O. invariant, welcher diese Funktionen genügen. Wir wollen nun feststellen, welche Diffgl.n außerdem noch die Gruppe (8′) gestatten. Dazu brauchen wir die beiden folgenden, auch späterhin nützlichen Sätze:

Satz 2. *Die r Symbole*

$$X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

mögen in der Beziehung stehen [2])

$$(X_j X_k) = \sum_{l=1}^{r} \sigma_{jkl}(x_1, \ldots, x_n)\,X_l f \qquad (j, k = 1, \ldots, r).$$

Die $h(\leqq n, r)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1} & \cdots & \xi_{rn} \end{pmatrix}$$

mögen mit $\Delta_1^{(h)}, \ldots, \Delta_{N_h}^{(h)}$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$X_j \Delta_k^{(h)} = \sum_{l=1}^{N_h} \tau_{jkl}(x_1, \ldots, x_n)\,\Delta_l^{(h)} \qquad (j = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, N_h),$$

und das Gleichungensystem

$$\Delta_1^{(h)} = 0, \ldots, \Delta_{N_h}^{(h)} = 0$$

gestattet die inf. Trf.n $X_1 f, \ldots, X_r f$, sobald sich die σ_{jkl} für die aus ihm bestimmten Wertsysteme $x_1, \ldots, x_n$ regulär verhalten [3]).

Satz 3. *Wenn ein Gleichungensystem*

$$(A) \qquad \Phi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \Phi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

die von $X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(j = 1, \ldots, r)$ erzeugte r-gliedrige Gruppe gestattet, sind zwei Fälle möglich: Entweder wird vermöge (A) *der Rang der Matrix der ξ_{ji} nicht erniedrigt und dann ist* (A) *äquivalent einem System*

$$(B) \qquad \Psi_1(I_1, \ldots, I_{n-R}) = 0, \ldots, \Psi_m(I_1, \ldots, I_{n-R}) = 0$$

von Relationen zwischen den $n - R$ wesentlichen Invarianten $I_1, \ldots, I_{n-R}$ der Gruppe; R bedeutet die Rangzahl der Matrix der ξ_{ji}. Oder aber es gibt eine kleinste natürliche Zahl

[1]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Abschn. 1, Kap. 3.

[2]) Unter dem *Klammerausdruck* $(X_j X_k)$, der aus den Symbolen $X_j f$, $X_k f$ *kombiniert* oder *zusammengesetzt* heißt, ist das Symbol $\sum_{i=1}^{n} (X_j \xi_{ki} - X_k \xi_{ji})\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = X_j X_k f - X_k X_j f$ zu verstehen.

[3]) Beweis a. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 14, § 68.

$h < R$, so daß (A) *alle h-reihigen Determinanten der Matrix der ξ_{ji} zum Verschwinden bringt, also die Gleichungen*

$$\text{(C)} \qquad \Delta_1^{(h)} = 0, \ldots, \Delta_{N_h}^{(h)} = 0$$

nach sich zieht. Das System (C) *selber ist nach Satz 2 wegen*

$$(X_j X_k) = \sum_{l=1}^{r} c_{jkl} X_l f \qquad (j, k = 1, \ldots, r)\ ^{4})$$

gegenüber der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ invariant [5]).

Den Satz 3 wenden wir an auf die durch Mitnahme von $y', \ldots, y^{(n)}$ n-mal *erweiterte* [6]) Gruppe (8′). Die Erweiterung der inf. Trf.

$$Xf = \xi(x, y)p + \eta(x, y)q \quad \left(p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

schreiben wir wie üblich

$$\text{(9)} \qquad X^{(n)} f = \xi p + \eta q + \eta' q' + \cdots + \eta^{(n)} q^{(n)} \quad \left(q^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}\right),$$

worin die $\eta^{(i)}$ durch die Rekursionsformel bestimmt sind

$$\text{(9′)} \qquad \eta^{(i+1)} = \frac{d\eta^{(i)}}{dx} - \frac{d\xi}{dx} y^{(i+1)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die *Differential-Invarianten* [7]) bis einschließlich n-ter O. der Gruppe (8′) sind nach (9) und (9′) die Lösungen des *vollständigen Systems* [8]) von $n + 1$ Gleichungen in $n + 2$ Veränderlichen

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} Q_j \frac{\partial f}{\partial y} + Q_j' \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots + Q_j^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} + Q_j^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \\ y \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots + y^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} + y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0\,. \end{aligned}$$

Die Determinante

$$\text{(10′)} \qquad \begin{vmatrix} Q_1 & Q_1' & \cdots & Q_1^{(n-1)} & Q_1^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_n & Q_n' & \cdots & Q_n^{(n-1)} & Q_n^{(n)} \\ y & y' & \cdots & y^{(n-1)} & y^{(n)} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden, denn nach der letzten Zeile entwickelt weist sie für $y^{(n)}$ die sicher nicht verschwindende Wronskische Determinante der Größen $Q_1, \ldots, Q_n$ als Koeffizienten auf. Die Gleichungen (10) sind daher voneinander unabhängig und besitzen somit nur *eine* wesentliche Lösung, nämlich *die Invariante x der intransitiven* [9]) *Gruppe* (8). Nach Satz 3 erhalten wir demnach alle invarianten Diffgl.n 1. bis n-ter O. der Gruppe (8′) durch Nullsetzen der h-reihigen Minoren von (10′). Da nun für $h < n + 1$ diese Minoren keinen eine der Größen $y, y', \ldots, y^{(n)}$ enthaltenden Faktor gemeinsam haben, so bekommen wir nur für $h = n + 1$, also durch Nullsetzen der Determinante (10′) selber eine invariante Diffgl., und zwar offensichtlich gerade die Diffgl. (7), welche ja durch das Lösungensystem $Q_1, \ldots, Q_n$ bestimmt ist.

---

[4]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 9.
[5]) Über den Beweis s. a. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 14, § 63.
[6]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 25.
[7]) A. a. O. [6]).
[8]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 5.
[9]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 13, § 58.

Indessen geht uns bei der Erweiterung in bezug auf $y', \ldots, y^{(n)}$ eine invariante Diffgl. der Gruppe (8) verloren, nämlich die Diffgl. $\frac{dx}{dy} = x' = 0$ oder $y' = \infty$ der *Bahnkurven* $x = \text{const.}$

Aus dem Nichtverschwinden der Determinante (10′) folgt nach den bekannten Sätzen über vollständige Systeme, daß die Gruppe (8′) je *eine* Differential-Invariante $(n+i)$-ter O. $(i = 1, 2, \ldots)$ besitzt. Fassen wir zusammen:

Satz 4. *Die Gruppe* (8) *besitzt eine Invariante nullter O., nämlich x, und je eine Differentialinvariante $(n+i)$-ter O. $(i = 1, 2, \ldots)$. Sie läßt ferner die Diffgl. $y' = \infty$ und die Diffgl.* (7) *invariant, aber keine weiteren Diffgl.n von niedrigerer als $(n+1)$-ter O.*

3. Aus jeder Gruppe

$$\mathfrak{Q}_1(\mathfrak{x})\mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{Q}_n(\mathfrak{x})\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{y}\mathfrak{q} \qquad \left(\mathfrak{q} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}\right) \tag{11}$$

gewinnen wir unbegrenzt viele neue Gruppen, indem wir sie allen möglichen P. T.n (1) unterwerfen. Die Gruppen dieser Kategorie wollen wir mit $\mathcal{G}_{n+1}$ bezeichnen. Dann erhebt sich die Frage, ob die Diffgl. (7) außer der Gruppe (8′) noch andere Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}$ gestattet. Die endlichen Trf.n dieser $\mathcal{G}_{n+1}$ müßten dabei nach Satz 1 für $n > 2$ die Gestalt

$$\tilde{x} = X(x), \qquad \tilde{y} = \Phi(x)y + Q(\tilde{x}) \tag{12}$$

besitzen, unter Q die allgemeinste Lösung von (7) verstanden, so daß jede derartige $\mathcal{G}_{n+1}$ von $n+1$ inf. Trf.n

$$X_j f = \xi_j(x)p + (\varphi_j(x)y + \bar{Q}_j(x))q \qquad (j = 1, \ldots, n+1) \tag{13}$$

erzeugt wäre, wobei $\bar{Q}_1, \ldots, \bar{Q}_{n+1}$ gewisse Lösungen von (7) bedeuten. Da die Gruppe (13) mit einer Gruppe (11) *ähnlich* [10]) sein soll, dürfen wir die $X_j f$ so gewählt denken, daß die Beziehungen bestehen [11])

$$(X_j X_k) = 0, \quad (X_j X_{n+1}) = X_j f \qquad (j, k = 1, \ldots, n). \tag{13′}$$

Ferner muß die Gruppe (13) ebenso wie die ähnliche Gruppe (11) intransitiv sein, d. h. es gibt zwei nicht gleichzeitig verschwindende Funktionen $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$, so daß die aus (13) linear abgeleiteten inf. Trf.n $\xi p + \eta q$ der Gleichung genügen

$$\mu\xi = \lambda\eta. \tag{14}$$

Nun erzeugen die inf. Trf.n $\xi_1(x)\frac{df}{dx}, \ldots, \xi_{n+1}(x)\frac{df}{dx}$ schon eine Gruppe im Kontinuum (x), d. h. es sind höchstens *drei* linear unabhängige unter ihnen [12]). Da $n > 2$ vorausgesetzt, lassen sich mithin aus (13) solche inf. Trf.n $\sum_{j=1}^{n+1} e_j X_j f = \xi_0 p + \eta_0 q$ bilden, für die $\sum_{j=1}^{n+1} e_j \xi_j = \xi_0 = 0$, so daß natürlich $\eta_0 \neq 0$. Es muß also in (14) $\lambda = 0$ sein, woraus ganz allgemein $\xi = 0$ folgt, d. h. das Verschwinden aller $\xi_j(x)$ in (13). Mit Rücksicht darauf liefert (13′)

$$\bar{Q}_j \varphi_{n+1} - \bar{Q}_{n+1}\varphi_j = \varphi_j y + \bar{Q}_j, \quad \text{d. h.} \quad \varphi_j = 0 \; (j = 1, \ldots, n), \quad \varphi_{n+1} = 1.$$

Die Gruppe (13) ist daher mit der Gruppe (8′) identisch. Darin liegt der allgemeine Satz:

Satz 5. *Eine gewöhnliche Diffgl. n-ter, und zwar höherer als 2. O., die durch P. T. lineare homogene Form annehmen kann, gestattet genau eine $\mathcal{G}_{n+1}$ von P. T.n.*

[10]) *Ähnlich* heißen zwei Gruppen von Trf.n, die durch Einführung neuer Veränderlicher ineinander übergeführt werden können.

[11]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 17.

[12]) A. a. O. [1]), Abschn. 3, Kap. 1.

Die Sätze 5 und 4 zusammen lassen erkennen, daß für $n > 2$ zwischen den Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}$ und den gewöhnlichen Diffgl.n n-ter O., die durch P. T. lineare homogene Form erhalten können, eine eindeutig-umkehrbare Zuordnung stattfindet. Nach der in Ziffer 1 an die Formel (5′) angeknüpften Bemerkung gibt es also in der Kategorie aller $\mathcal{G}_{n+1}$ mit $n > 2$ *unendlich viele Typen* von Gruppen (übrigens schon eine Folgerung aus Satz 4 allein); als einen Gruppentypus bezeichnen wir dabei nach Lie eine Klasse von ähnlichen Gruppen, die zu jeder ihrer Gruppen zugleich *alle* mit ihr ähnlichen umfaßt. Die Gruppe

$$(15) \qquad Q_1(x)q, \quad Q_2(x)q, \quad yq$$

dagegen geht z. B. durch die Trf. (6′) über in [13])

$$(15') \qquad \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{y}\mathfrak{q},$$

d. h. die sämtlichen Gruppen $\mathcal{G}_{2+1}$ gehören *einem* Typus an. Dasselbe gilt auch für die Gruppen $\mathcal{G}_{1+1}$.

Zur Vereinfachung der Redewendung führen wir noch für die gewöhnlichen Diffgl.n n-ter O., die sich durch P. T. auf lineare homogene Form bringen lassen, die Bezeichnung $\mathcal{D}_n$ ein. Bei gegebenem n weisen die verschiedenen Typen von Diffgl.n $\mathcal{D}_n$ und Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}$, vom gruppentheoretischen Standpunkt aus gesehen, *kein* einheitliches Verhalten auf. Das offenbart sich, wenn wir die Frage nach der *größten* Gruppe stellen, die von einer gegebenen Diffgl. $\mathcal{D}_n$ oder Gruppe $\mathcal{G}_{n+1}$ gestattet wird. Für $n > 2$ ist natürlich diese größte Gruppe für einander *zugeordnete* Diffgl.n $\mathcal{D}_n$ und Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}$ *dieselbe*.

4. Die größte von der Gruppe (8) gestattete Gruppe von P. T.n ist imprimitiv [14]), da sie die Schar der Geraden $x = \text{const.}$ invariant lassen muß; ihre Trf.n transformieren daher die Variable x unabhängig von y, d. h. ihre inf. Trf.n haben die Form

$$(16) \qquad \xi(x)\,p + \eta(x, y)\,q.$$

Ferner muß die gesuchte größte Gruppe auch die *Derivierte* [15])

$$(17) \qquad Q_1(x)\,q, \ldots, Q_n(x)\,q$$

der Gruppe (8′) reproduzieren. Für die inf. Trf.n (16) bestehen also Beziehungen der Form [16])

$$(18) \qquad \begin{aligned} Q_j\eta_y - Q_j'\xi &= \sum_{k=1}^{n} c_{jk}Q_k \qquad (j = 1, \ldots, n) \\ y\eta_y - \eta &= \sum_{k=1}^{n} c_k Q_k + cy. \end{aligned}$$

Wenn $n \geqq 2$, so folgt etwa aus den beiden ersten Gleichungen (18)

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} c_{1k}\frac{Q_2Q_k}{Q_1Q_2' - Q_2Q_1'} - \sum_{k=1}^{n} c_{2k}\frac{Q_1Q_k}{Q_1Q_2' - Q_2Q_1'},$$

d. h. ξ ist linear abgeleitet aus $2n$ gegebenen Größen, es gibt mithin nur *endlich* viele linear unabhängige $\xi(x)$, etwa $\xi_1(x), \ldots, \xi_m(x)$. Weiterhin folgt aus jeder der n ersten Gleichungen (18) $\eta_{yy} = 0$, so daß die inf. Trf.n (16) die Gestalt $\xi(x)\,p + (\varphi(x)\,y + \chi(x))\,q$

---

[13]) Das Symbol $Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$ geht durch die Trf. $y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $x_i = \overline{\varphi}_i(y_1, \ldots, y_n)$ über in $Xf = \sum_{i=1}^{n} X\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial f}{\partial y_i} = Yf$.

[14]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 13, § 60.

[15]) Die endlich oder unendlich vielen inf. Trf.n $\ldots, Xf, \ldots, Yf, \ldots$ mögen eine Gruppe G erzeugen; dann erzeugt der Inbegriff aller inf. Trf.n (XY) eine Untergruppe von G, die (erste) *Derivierte* ∂G von G. $\partial(\partial G) = \partial^2 G$ heißt die *zweite* Derivierte von G usw.

[16]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 15, Theorem 43.

bekommen. Für die Größen φ und χ liefert (18):

$$(18') \qquad \begin{aligned} Q_j\varphi(x) - Q_j'\xi &= \sum_{k=1}^{n} c_{jk}Q_k && (j = 1, \ldots, n) \\ -\chi(x) &= \sum_{k=1}^{n} c_k Q_k && (c = 0!). \end{aligned}$$

Infolgedessen dürfen wir den Bestandteil $\chi(x)\,q$ als der Gruppe (8′) selber angehörend weglassen. Aber ξ müssen wir als von Null verschieden voraussetzen, wenn wir eine der Gruppe (8′) nicht zugehörige inf. Trf. erhalten wollen. Denn für $\xi = 0$ nehmen die n ersten Gleichungen (18′) die Form an

$$(18'') \qquad \begin{aligned} &(c_{11} - \varphi(x))\,Q_1 + c_{12}Q_2 + \cdots + c_{1n}Q_n = 0 \\ &c_{21}Q_1 + (c_{22} - \varphi(x))\,Q_2 + \cdots + c_{2n}Q_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &c_{n1}Q_1 + c_{n2}Q_2 + \cdots + (c_{nn} - \varphi(x))\,Q_n = 0, \end{aligned}$$

wobei die Determinante dieses Systems verschwinden müßte, wodurch $\varphi(x)$ als Konstante bestimmt würde. Es gibt also nur m untereinander und von den inf. Trf.n (8′) linear unabhängige inf. Trf.n, welche die Gruppe (8′) nicht transformieren; *die Gruppe* (8′) *ist daher invariant in einer größten Gruppe der Form*

$$(19) \qquad \begin{aligned} &Q_1 q, \ldots, Q_n q;\ yq;\ \xi_i(x)\,p + \varphi_i(x)\,yq \\ &(n \geqq 2;\ i = 1, \ldots, m;\ 0 \leqq m \leqq 3). \end{aligned}$$

Daß m nicht größer als 3 sein kann, folgt wieder daraus, daß $\xi_1(x)\frac{df}{dx}, \ldots, \xi_m(x)\frac{df}{dx}$ eine Gruppe im Kontinuum (x) erzeugen müssen.

Die Zahl m in (19) bestimmt den gruppentheoretischen Charakter der Gruppe (8′). Um dies näher zu untersuchen, sehen wir nun einmal davon ab, daß die Gruppe (19) gerade die *größte* Gruppe sein soll, in der (8′) als invariante Untergruppe steckt, begnügen uns vielmehr damit, (8′) als in (19) invariant vorauszusetzen. Durch eine geeignete Trf. $\tilde{x} = X(x)$, $\tilde{y} = y$ läßt sich jede Gruppe (19) mit $m \geqq 1$ in die Form bringen [17])

$$(20_m) \qquad \begin{aligned} &Q_1 q, \ldots, Q_n q, yq;\quad x^{i-1}p + \varphi_i(x)\,yq \\ &(i = 1, \ldots, m;\ m = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Aus Gründen der *Zusammensetzung* [18]) der Gruppe (20_m) folgt, daß jede Gruppe (20_m) eine Untergruppe (20_{m-1}) enthält. Wir betrachten daher zunächst die Gruppe

$$(21) \qquad Q_1 q, \ldots, Q_n q, yq;\quad p + \varphi_1(x)\,yq.$$

Durch die Trf.

$$(21') \qquad \tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = e^{-\int \varphi_1(x)dx}\,y,$$

welche weder die Form der Gruppe (8′) noch einer Gruppe (20_m) $(m = 1, 2, 3)$ zerstört, verwandelt sich die inf. Trf. $p + \varphi_1(x)\,yq$ in $\tilde{p}$, so daß wir an Stelle der Gruppe (21) von vornherein eine Gruppe der Form

$$(22) \qquad Q_1 q, \ldots, Q_n q, yq;\ p$$

behandeln können. Hier müssen Relationen der Gestalt

$$(22') \qquad Q_j' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}Q_k \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

bestehen; sie besagen, daß mit $Q(x)$ zugleich auch $Q'(x)$ eine Lösung der zur Gruppe (8′) gehörigen $\mathfrak{D}_n$ (7) sein muß. Setzen wir $Q(x)$ in (7) ein, so folgt durch Differentiation

$$Q^{(n+1)} - \alpha_{n-1}Q^{(n)} - \cdots - \alpha_1 Q'' - \alpha_0 Q' - (\alpha_{n-1}'Q^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1'Q' + \alpha_0'Q) = 0;$$

[17]) A. a. O. [1]), Abschn. 3, Kap. 1.

[18]) Über diesen Begriff s. a. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 17.

Einsetzen von $Q'(x)$ in (7) liefert

$$Q^{(n+1)} - \alpha_{n-1}Q^{(n)} - \cdots - \alpha_1 Q'' - \alpha_0 Q' = 0\,,$$

so daß aus beiden Gleichungen zusammen

$$\alpha'_{n-1}Q^{(n-1)} + \cdots + \alpha'_1 Q' + \alpha'_0 Q = 0$$

resultiert; wegen des Nichtverschwindens der Wronskischen Determinante von $Q_1, \ldots, Q_n$ kann die letzte Gleichung nur bestehen, wenn

$$\alpha'_{n-1} = \cdots = \alpha'_1 = \alpha'_0 = 0,$$

also die Diffgl. (7) *konstante Koeffizienten besitzt*:

$$y^{(n)} - c_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - c_1 y' - c_0 y = 0. \tag{23}$$

Umgekehrt weisen n linear unabhängige Lösungen Q_j einer Diffgl. (23) immer die Beziehungen (22′) auf, da mit $Q(x)$ auch $Q'(x)$ eine Lösung von (23) ist. *Einer Gruppe* $\mathcal{G}_{n+1}$

$$Q_1 q, \ldots, Q_n q, yq; \quad Q'_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} Q_k \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{24}$$

ist daher eine $\mathcal{D}_n$ (23) *mit konstanten Koeffizienten zugeordnet und umgekehrt.*

Betrachten wir jetzt eine Gruppe (20_2), so dürfen wir sie von vornherein in der Gestalt annehmen

$$Q_1 q, \ldots, Q_n q,\ yq; \qquad p,\ xp + \varphi_2(x)\, yq. \tag{25}$$

Bildung des Klammerausdrucks $(p, xp + \varphi_2 yq)$ liefert

$$\varphi'_2 y = \sum_{k=1}^{n} b_k Q_k + by, \quad \text{d. h.} \quad \varphi'_2 = b,$$

so daß wir $\varphi_2 = bx$ wählen dürfen. Durch die Trf.

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = e^{-bx} y, \tag{25′}$$

welche p in $\tilde{p} - b\tilde{y}\tilde{q}$ verwandelt, also der Gruppe (22) ihre Form beläßt, geht die Gruppe (25) über in die Form

$$Q_1 q, \ldots, Q_n q,\ yq; \quad p, xp. \tag{26}$$

Neben (22′) gelten daher noch Relationen

$$xQ'_j = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{jk} Q_k \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{26′}$$

d. h. zugleich mit $Q(x)$ ist immer auch $xQ'(x)$ eine Lösung der gegenüber (24) invarianten Diffgl. (23). Folglich ist auch $x(xQ')' = xQ' + x^2Q''$, also auch x^2Q'' eine Lösung, ebenso $x(x^2Q'')' = 2x^2Q'' + x^3Q'''$ und somit x^3Q''' eine Lösung von (23) usw. Wir haben also die $n + 1$ Lösungen

$$Q^{(n)}, xQ^{(n)}, x^2Q^{(n)}, \ldots, x^n Q^{(n)}$$

von (23), zwischen denen eine Relation

$$\sum_{k=0}^{n} e_k x^k Q^{(n)} = 0$$

mit nicht lauter verschwindenden e_k bestehen muß, *woraus* $Q^{(n)} = 0$ *folgt*; *d. h. die Gruppe* (26) *und ihre Untergruppe* (24) *lauten*

$$q, xq, x^2q, \ldots, x^{n-1}q, yq; \quad p, xp \tag{27}$$

$$q, xq, x^2q, \ldots, x^{n-1}q, yq, \tag{28}$$

und die invariante Diffgl. (23) *reduziert sich auf*

$$y^{(n)} = 0. \tag{29}$$

Von der Gruppe (20_3) können wir daher voraussetzen, daß sie in der Form

$$q, xq, x^2q, \ldots, x^{n-1}q,\ yq; \quad p,\ xp,\ x^2p + \varphi_3(x)\, yq \tag{30}$$

vorliege. Die inf. Trf. $(p, x^2p + \varphi_3 yq) = 2xp + \varphi_3' yq$ muß also linear zusammengesetzt sein aus xp und yq, d. h. es ist $\varphi_3' = \text{const.}$, $\varphi_3 = cx$. Durch Kombination von $x^{n-1}q$ und $x^2p + cxyq$ ergibt sich $c = n - 1$, so daß die Gruppe (30) lautet

$$(31) \qquad q, xq, x^2q, \ldots, x^{n-1}q, yq; \quad p, xp, x^2p + (n-1)xyq.$$

Die Gruppe (31) ist für $n \geqq 2$ die größte Gruppe, in der die Gruppe (28) invariant ist und für $n > 2$ die größte von der Diffgl. (29) gestattete Gruppe. Die größte Gruppe, welche von der Diffgl. $y'' = 0$ gestattet wird, ist bekanntlich die allgemeine projektive Gruppe der Ebene, die von den 8 inf. Trf.n erzeugt wird [19])

$$(32) \qquad q, xq, yq; \quad p, xp, x^2p + xyq; \quad yp, xyp + y^2q;$$

in (32) gibt es ∞^2 mit der größten von q, xq, yq gestatteten Gruppe

$$(33) \qquad q, xq, yq; \quad p, xp, x^2p + xyq$$

gleichberechtigte [20]) Gruppen, also auch ∞^2 mit q, xq, yq selber *gleichberechtigte* $\mathcal{G}_{2+1}$. Daraus folgt allgemein:

Satz 6. *Die Diffgl.n, welche durch P. T. in $y'' = 0$ verwandelt werden können, gestatten ∞^2 mit q, xq, yq durch P. T. ähnliche Gruppen.*

Wenden wir uns von diesem Sonderfall wieder zum allgemeinen Fall $n \geqq 3$ zurück, dann lehrt das auf die Gruppen (20_2) bezügliche Ergebnis, daß eine Gruppe $(8')$, die eine $(n+3)$-gliedrige Gruppe (der Form (19)) gestattet, von selbst schon in einer $(n+4)$-gliedrigen Gruppe invariant ist, oder allgemeiner gesprochen:

Satz 7. *Gestatten für $n \geqq 3$ eine $\mathcal{D}_n$ und ihre zugeordnete $\mathcal{G}_{n+1}$ noch zwei weitere voneinander und von den inf. Trf.n der $\mathcal{G}_{n+1}$ linear unabhängige inf. Trf.n, dann gestatten sie auch noch eine dritte, die mit den genannten zusammen die größte (und zwar $(n+4)$-gliedrige) von der $\mathcal{D}_n$ und ihrer $\mathcal{G}_{n+1}$ gestattete Gruppe erzeugt.*

Wir haben also *drei* Kategorien von Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}$ und Diffgl.n $\mathcal{D}_n$ $(n \geqq 3)$, je nachdem die größte Gruppe, der gegenüber sie invariant sind, $n+1$, $n+2$ oder $n+4$ Parameter aufweist. Wir unterscheiden diese Kategorien durch die Schreibung $\mathcal{G}_{n+1}^{\mathrm{I}}, \mathcal{G}_{n+1}^{\mathrm{II}}, \mathcal{G}_{n+1}^{\mathrm{III}}$ und $\mathcal{D}_n^{\mathrm{I}}, \mathcal{D}_n^{\mathrm{II}}, \mathcal{D}_n^{\mathrm{III}}$. Die Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}^{\mathrm{III}}$ sowie die Diffgl.n $\mathcal{D}_n^{\mathrm{III}}$ repräsentieren *einen einzigen Typus*, da sie ja sämtlich in (28) bzgl. (29) übergeführt werden können. Die Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}^{\mathrm{II}}$ lassen sich immer in die Form (24), aber nicht in (28) transformieren, während die Diffgl.n $\mathcal{D}_n^{\mathrm{II}}$ auf die Form (23) gebracht werden können, wobei die Konstanten $c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$ niemals alle zugleich verschwinden. Für die $\mathcal{G}_{n+1}^{\mathrm{I}}$ und $\mathcal{D}_n^{\mathrm{I}}$ endlich lassen sich nur die allgemeinen Formen $(8')$ bzgl. (7) erreichen.

Offen bleibt noch die Frage, wie viele *Typen* die Kategorie der $\mathcal{G}_{n+1}^{\mathrm{II}}$ bzgl. $\mathcal{D}_n^{\mathrm{II}}$ ausmacht. Die Trf.n, welche die $\mathcal{D}_n^{\mathrm{II}}$ (23) wieder in eine Diffgl. mit konstanten Koeffizienten

$$(34) \qquad \mathfrak{y}^{(n)} - \hat{c}_{n-1}\mathfrak{y}^{(n-1)} - \cdots - \hat{c}_1\mathfrak{y}' - \hat{c}_0\mathfrak{y} = 0$$

verwandeln, haben nach Satz 1 zunächst die Gestalt $(5')$, unter $\mathfrak{Q}(\mathfrak{x})$ die allgemeinste Lösung von (34) verstanden. Die größte von (34) gestattete Gruppe hat wieder die Form

$$(34') \qquad \mathfrak{Q}_1(\mathfrak{x})\,\mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{Q}_n(\mathfrak{x})\,\mathfrak{q}, \mathfrak{y}\mathfrak{q}; \quad \mathfrak{p}; \quad \mathfrak{Q}_j' = \sum_{k=1}^{n} \hat{a}_{jk}\mathfrak{Q}_k \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Die inf. Trf. p wird nun vermöge der Trf. $(5')$ zu

$$p = X'\mathfrak{p} + \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\mathfrak{y} + \mathfrak{Q}'X' - \frac{\Phi'}{\Phi}\mathfrak{Q}\right)\mathfrak{q};$$

[19]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 26, § 134.

[20]) Gleichberechtigt heißen zwei Untergruppen G_1, G_2 einer Gruppe G, wenn sie durch Trf.n der Gruppe G ähnlich sind.

diese inf. Trf. kann aber nur dann aus den inf. Trf.n (34′) linear abgeleitet sein, wenn $X' = \text{const.}$, $\frac{\Phi'}{\Phi} = \text{const.}$, d. h. wenn die Trf. (5′) so aussieht:

$$\mathfrak{x} = ax + \bar{a}, \quad \mathfrak{y} = \bar{b}e^{bx}y + \Omega(\mathfrak{x}). \tag{35}$$

Es ist aber klar, daß bei der Trf. von (34) vermöge (35) die Parameter $\bar{a}$, $\bar{b}$ sowie die Funktion $\Omega(\mathfrak{x})$ nichts zu der Veränderung der Diffgl. (34) beitragen, daß also die Koeffizienten der neuen Diffgl. (23) nur von a, b abhängen. Darin liegt, *daß es (für $n \geqq 3$) unbegrenzt viele Typen von $\mathcal{D}_n^{\text{II}}$ und $\mathcal{G}_{n+1}^{\text{II}}$ gibt.*

Die Kategorie der mit einer Gruppe (22) ähnlichen Gruppen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_{n+1}^1$. Ist eine $\mathcal{G}_{n+1}$ invariante Untergruppe einer G_{n+2}, dann ist diese eine $\mathcal{G}_{n+1}^1$. Jede $\mathcal{G}_{n+1}^1$ ($n > 1$) läßt (s. Satz 4) nur *eine* Imprimitivitätszerlegung der Ebene invariant. *Die größte Untergruppe einer $\mathcal{G}_{n+1}^1$, welche die Kurven ihrer Imprimitivitätszerlegung einzeln in Ruhe läßt, ist ihre invariante $\mathcal{G}_{n+1}$.*

Die Gruppe (31) umfaßt die ∞^2 Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}^1$

$$q,\ xq,\ x^2q,\ \ldots,\ x^{n-1}q,\ yq; \quad (a + bx + cx^2)\,p + c(n-1)\,xyq. \tag{36}$$

Diese Bemerkung führt auf den Satz:

Satz 8. *Eine $\mathcal{D}_n$ bzgl. $\mathcal{G}_{n+1}$ ($n \geqq 3$) ist dann und nur dann eine $\mathcal{D}_n^{\text{I}}, \mathcal{D}_n^{\text{II}}, \mathcal{D}_n^{\text{III}}$ bzgl. $\mathcal{G}_{n+1}^{\text{I}}, \mathcal{G}_{n+1}^{\text{II}}, \mathcal{G}_{n+1}^{\text{III}}$, wenn sie gerade $0, 1, \infty^2$ Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}^1$ gestattet.*

§ 2. Die Definitionsgleichungen der allgemeinsten P.T.s-Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}$, $\mathcal{G}_{n+1}^1$ und ihr Zusammenhang mit der zugeordneten $\mathcal{D}_n$.

1. Es gilt nun, die *allgemeinen* Gruppen $\mathcal{G}_{n+1}$, $\mathcal{G}_{n+1}^1$ *explizit* zu charakterisieren. Die naturgemäße Methode dazu ist die Aufstellung ihrer *Definitionsgleichungen* (Defgl.n), genauer gesagt, der Defgl.n ihrer inf. Trf.n. Die Defgl.n einer endlichen oder unendlichen Gruppe von Trf.n der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ werden repräsentiert durch ein System von linearen homogenen partiellen Diffgl.n für die Größen $\xi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \xi_n(x_1, \ldots, x_n)$ der die Gruppe erzeugenden inf. Trf.n $Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Die Koeffizienten dieser Defgl.n müssen zwei Arten von Bedingungen erfüllen: erstens die Integrabilitäts-Bedingungen (Int. Bed.n) und zweitens die *Gruppen*-Bedingungen (Gr. Bed.n). Die letzteren realisieren die Forderung, daß zugleich mit X_1f, X_2f auch die inf. Trf. (X_1X_2) die Defgl.n befriedigen soll [21]) [22]).

Auf die Form der Defgl.n für die inf. Trf.n $Xf = \xi p + \eta q$ einer P. T.s-Gruppe der Ebene müssen wir noch näher eingehen. Wir denken uns die Ableitungen $\xi, \eta, \xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y, \xi_{xx}, \ldots$ von ξ, η nach irgend einem Schema numeriert, jedoch so, daß die Nummern wachsen mit der Ordnung der Ableitungen; die so abgezählten Ableitungen bezeichnen wir mit $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \zeta^{(3)}, \ldots$. Die Defgl.n einer P. T.s-Gruppe der Ebene haben dann die Gestalt

$$\alpha_{i1}(x, y)\zeta^{(1)} + \alpha_{i2}(x, y)\zeta^{(2)} + \cdots + \alpha_{im_i}(x, y)\zeta^{(m_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{37}$$

Sind $X_1f = \xi_1 p + \eta_1 q$ und $X_2f = \xi_2 p + \eta_2 q$ zwei durch (37) bestimmte inf. Trf.n, so wird auch $(X_1X_2) = \tilde{\xi}p + \tilde{\eta}q$ durch (37) bestimmt, d. h. zugleich mit ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 repräsentieren auch die Größen

$$\tilde{\xi} = X_1\xi_2 - X_2\xi_1, \quad \tilde{\eta} = X_1\eta_2 - X_2\eta_1 \tag{38}$$

[21]) Lie, Gesammelte Abhandlungen **6**, Abhdlg. XII, Theorem V und VII.

[22]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 11, Theorem 28.

ein Lösungspaar von (37). Diese Größen lassen sich mit Hilfe der Abkürzung

$$(39) \qquad \zeta_1^{(j)}\zeta_2^{(k)} - \zeta_2^{(j)}\zeta_1^{(k)} = (\zeta^{(j)}\zeta^{(k)})$$

folgendermaßen schreiben

$$(40) \qquad \tilde{\xi} = (\xi\xi_x) + (\eta\xi_y), \quad \tilde{\eta} = (\xi\eta_x) + (\eta\eta_y).$$

Vermöge des Systems (37) bleiben noch endlich oder unendlich viele Ableitungen $\zeta^{(j)}$ willkürlich, je nachdem die durch (37) definierte Gruppe endlich oder unendlich ist, und im ersteren Falle ist die Anzahl ihrer Parameter gleich der Anzahl der unabhängigen Ableitungen. Für die Auswahl eines Systems willkürlicher Ableitungen bleibt uns im allgemeinen noch ein gewisser Spielraum; sei daher etwa

$$(41) \qquad \zeta^{(r_1)}, \zeta^{(r_2)}, \zeta^{(r_3)}, \ldots$$

eine mögliche Reihe unabhängiger Ableitungen. Setzen wir nun die Größen (38) in (37) ein, so muß ein System von Identitäten $0 \equiv 0$ herauskommen. Nach (40) sind die Ableitungen von $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ vermöge (37) lineare homogene Funktionen der Ausdrücke $(\zeta^{(r_j)}\zeta^{(r_k)})$, die sich aus den willkürlichen Ableitungen

$$(41') \qquad \zeta_1^{(r_1)}, \zeta_1^{(r_2)}, \ldots, \zeta_2^{(r_1)}, \zeta_2^{(r_2)}, \ldots$$

bilden lassen, mit Koeffizienten, die rational aus den α_{il} und ihren Derivierten aufgebaut sind. Die linken Seiten von (37) werden daher beim Einsetzen von $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ ebenfalls zu linearen homogenen Funktionen der Ausdrücke $(\zeta^{(r_j)}\zeta^{(r_k)})$; diese Funktionen können aber nur dann identisch verschwinden, wenn ihre Koeffizienten Null werden, *d. h. wenn gewisse rationale Relationen zwischen den α_{il} und ihren Derivierten bestehen, eben die Gr. Bed.n.* Diese bilden zusammen mit den gleichfalls rationalen Int. Bed.n, welche der Forderung entsprechen, daß die Ableitungen (41) unabhängig bleiben sollen, ein System von Relationen

$$(42) \qquad R_k(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{11x}, \alpha_{11y}, \ldots) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

das für die Defgl.n (37) charakteristisch ist.

2. Aus den Defgl.n (37) können wir nun die Differential-Invarianten sowie gewisse invariante Diffgl.n der Gruppe (37) gewinnen, und zwar lassen sich die diesbezüglichen Methoden ohne weiteres auf Trf.s-Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen übertragen. Wir denken uns die durch (37) definierte endliche oder unendliche Gruppe etwa n-mal durch Mitnahme von $y', \ldots, y^{(n)}$ erweitert und die allgemeine inf. Trf. $X^{(n)}f$ der so erweiterten Gruppe gebildet. Nach (9′) ist dann $X^{(n)}f$ vermöge (37) linear homogen in einer gewissen Anzahl von willkürlichen Ableitungen (41):

$$(43) \qquad X^{(n)}f = \sum_{i=1}^{N} \zeta^{(r_i)} C_i f,$$

$$(43') \qquad C_i f = \Xi_i p + \mathsf{H}_i q + \mathsf{H}_i' q' + \cdots + \mathsf{H}_i^{(n)} q^{(n)} \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

wo die Ξ_i, $\mathsf{H}_i^{(k)}$ ganze rationale Funktionen von $y', \ldots, y^{(n)}$ bedeuten, deren Koeffizienten sich rational aus den α und ihren Derivierten zusammensetzen. Bezüglich der $C_i f$ gilt nun:

Satz 9. *Die Symbole* (43′) *stehen in der Beziehung*

$$(44) \qquad (C_j C_k) = \sum_{l=1}^{N} \psi_{jkl}(x, y)\, C_l f \qquad (j, k = 1, \ldots, N),$$

wobei die ψ_{jkl} rational aus den Koeffizienten α des Systems (37) *und deren Derivierten aufgebaut sind.*

Zum Beweis bilden wir aus zwei beliebigen inf. Trf.n $X_1^{(n)}f$, $X_2^{(n)}f$ der n-mal erweiterten Gruppe (37) den Klammerausdruck

$$(45) \qquad (X_1^{(n)} X_2^{(n)}) = (X_1 X_2)^{(n)} \ ^{23}),$$

---

[23]) A. a. O. [1]), Abschn. 1, Kap. 25, § 130.

den wir in zweierlei Art ausrechnen können; zunächst:

$$(X_1^{(n)} X_2^{(n)}) = \Big(\sum_{j=1}^{N} \zeta_1^{(r_j)} C_j f,\ \sum_{k=1}^{N} \zeta_2^{(r_k)} C_k f\Big) = \sum_{j,k=1}^{N} \zeta_1^{(r_j)} \zeta_2^{(r_k)} (C_j C_k)$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{N} \zeta_1^{(r_j)} C_j \zeta_2^{(r_k)}\Big) C_k f - \sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{N} \zeta_2^{(r_k)} C_k \zeta_1^{(r_j)}\Big) C_j f$$
$$= \sum_{j,k=1}^{N} \zeta_1^{(r_j)} \zeta_2^{(r_k)} (C_j C_k) + \sum_{k=1}^{N} (X_1 \zeta_2^{(r_k)})\, C_k f - \sum_{j=1}^{N} (X_2 \zeta_1^{(r_j)})\, C_j f;$$

unter Berücksichtigung von (37) bekommen wir also:

$$(46) \qquad (X_1^{(n)} X_2^{(n)}) = \sum_{j,k=1}^{N} \zeta_1^{(r_j)} \zeta_2^{(r_k)} (C_j C_k) + \sum_{j,k=1}^{N'} \zeta_1^{(r_j)} \zeta_2^{(r_k)} \sum_{l=1}^{N} \varphi_{jkl}(x, y)\, C_l f.$$

Andererseits folgt aus (43), unter $\tilde{\zeta}^{(i)}$ die Ableitungen von $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ verstanden:

$$(X_1 X_2)^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\zeta}^{(r_i)} C_i f,$$

oder mit Rücksicht auf (37) und (40)

$$(46') \qquad (X_1 X_2)^{(n)} = \sum_{j,k=1}^{N''} \zeta_1^{(r_j)} \zeta_2^{(r_k)} \sum_{l=1}^{N} \chi_{jkl}(x, y)\, C_l f;$$

Vergleichung von (46) und (46′) gemäß (45) liefert den Satz 9.

Das System

$$(47) \qquad C_1 f = 0, \ldots, C_N f = 0,$$

dessen Lösungen die Differentialinvarianten $I(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ der Gruppe (37) *darstellen, ist demnach ein vollständiges.* Auf die Symbole (43′) können wir wegen (44) den Satz 2 anwenden, *so daß also Nullsetzen der Determinanten aus der Koeffizientenmatrix zu* (47) *invariante Gleichungssysteme der erweiterten Gruppe* (37) *ergibt.*

3. Bezeichnen wir nun mit G die *allgemeine* Gruppe eines *Typus* von P. T.s-Gruppen der Ebene und mit G_0 eine *spezielle* Gruppe dieses Typus. Die inf. Trf.n $\hat{\xi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\,\mathfrak{p} + \hat{\eta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\mathfrak{q}$ von G_0 mögen durch das System

$$(48) \qquad \mathfrak{a}_{i1}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\hat{\zeta}^{(1)} + \mathfrak{a}_{i2}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\hat{\zeta}^{(2)} + \cdots + \mathfrak{a}_{in_i}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\,\hat{\zeta}^{(n_i)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

definiert sein und zwischen den $\mathfrak{a}_{il}$ und ihren Ableitungen mögen die Gleichungen bestehen

$$(48') \qquad \mathfrak{R}_k(\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \ldots, \mathfrak{a}_{21}, \ldots, \mathfrak{a}_{11\,\mathfrak{x}}, \mathfrak{a}_{11\,\mathfrak{y}}, \ldots) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Die Defgl.n für die inf. Trf.n $\xi(x, y)\,p + \eta\,(x, y)\,q$ der allgemeinen Gruppe G erhalten wir dann aus (48) durch Ausübung der allgemeinsten P. T. (1) mittels der Formeln

$$(49) \quad \begin{cases} \text{(a)} & \hat{\xi} = X_x \xi + X_y \eta, & \hat{\eta} = Y_x \xi + Y_y \eta, \\ \text{(b)} & \xi = \dfrac{1}{D}\,(Y_y \hat{\xi} - X_y \hat{\eta}), & \eta = \dfrac{1}{D}\,(-\,Y_x \hat{\xi} + X_x \hat{\eta}), \end{cases}$$

$$(50) \quad \begin{cases} \text{(a)} & f_x = X_x f_{\mathfrak{x}} + Y_x f_{\mathfrak{y}}, & f_y = X_y f_{\mathfrak{x}} + Y_y f_{\mathfrak{y}}, \\ \text{(b)} & f_{\mathfrak{x}} = \dfrac{1}{D}\,(Y_y f_x - Y_x f_y), & f_{\mathfrak{y}} = \dfrac{1}{D}\,(-\,X_y f_x + X_x f_y). \end{cases}$$

Tragen wir die Werte (49a) für $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ in (48) ein, so ergeben sich mit Hilfe der Formeln (50b) unmittelbar eine Reihe von Gleichungen

$$(51) \qquad \beta_{i1}(x, y)\zeta^{(1)} + \beta_{i2}(x, y)\zeta^{(2)} + \cdots + \beta_{i\bar{n}_i}(x, y)\,\zeta^{(\bar{n}_i)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s);$$

$\beta_{i1}, \ldots, \beta_{i\bar{n}_i}$ sind linear homogen in $\mathfrak{a}_{i1}, \ldots, \mathfrak{a}_{in_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$ mit Koeffizienten, die sich rational aus den Derivierten von X, Y zusammensetzen. Das System (51) können wir noch auf mannigfache Art durch Eliminationen u. dgl. umformen; sei (37) eine derartige Umformung. Dann hängen die α_{il} als rationale Funktionen der β und ihrer Ab-

leitungen immer noch rational ab von den $\mathfrak{a}$, den Derivierten von X, Y und möglicherweise auch noch von den Ableitungen der $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ (vermöge (50a)):

$$(52) \qquad \alpha_{il} = A_{il}(\mathfrak{a}_{11}, \ldots, \mathfrak{a}_{11\,\mathfrak{x}}, \ldots, X_x, X_y, Y_x, \ldots) \qquad (l = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, s).$$

Nun geht jede der Gleichungen (49a), (50b) bei Ausübung der in Zyklen geschriebenen Substitution

$$(53) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(\xi\eta)$$

in sich über, während die Gleichungen (49b) sowie (50a) unter sich vertauscht werden. Folglich wird auch jede der Gleichungen (51) auf Grund ihrer Herleitung durch die Substitution (53) reproduziert. Jeder Umformung von (51) entspricht daher eine analoge, bei der lediglich ξ, η und $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ ihre Rollen wechseln; die analoge Umformung zu derjenigen, welche (51) in (37) verwandelt, bringt daher ein mit (37) äquivalentes System

$$(54) \qquad \bar{\alpha}_{i1}(x, y)\,\overline{\zeta^{(1)}} + \bar{\alpha}_{i2}(x, y)\,\overline{\zeta^{(2)}} + \cdots + \bar{\alpha}_{im_i}\,\overline{\zeta^{(m_i)}} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

hervor; $\overline{\zeta^{(j)}}$ bezeichnet dabei die aus $\zeta^{(j)}$ vermöge (53) gewonnene Ableitung und die Größe $\bar{\alpha}_{il}$ $(l = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, s)$ entsteht aus $\alpha_{il} = A_{il}$ in (52) durch Vertauschung von $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$. Verstehen wir allgemein unter $\overline{F}$ diejenige Größe, welche aus F durch Ausübung der Substitution (53) hervorgeht, dann liefert uns die Substitution

$$(55) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(\xi\eta)\,(F\overline{F}),$$

auf die Gleichungen (42) angewendet, die Relationen, denen die $\bar{\alpha}_{il}$ genügen müssen. Das folgt unmittelbar aus der Tatsache, *daß jedenfalls die Relationen* (42) *und* (48′) *vermöge* (52) *einander äquivalent sind.* Natürlich muß (54) auch direkt durch Umformung von (37) gewonnen werden können, d. h. die $\bar{\alpha}$ sind (rational) durch die α (und deren Ableitungen) bestimmt und umgekehrt. Diesen Sachverhalt wollen wir so aussprechen:

Satz 10. *Stellt das System* (37) *die Defgl.n der allgemeinen Gruppe eines Gruppentypus dar, dann ist ihm das System* (54) *gleichwertig, welches aus* (37) *mittels der Substitution* (55) *gebildet wird, und die zwischen den* $\bar{\alpha}$ *herrschenden Beziehungen werden aus den entsprechenden Beziehungen für die* α *ebenfalls durch diese Substitution gewonnen.*

4. Für die folgenden Rechnungen wird es sich als wesentliche Erleichterung bewähren, wenn wir an Stelle der Operationen (Op.n) $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ die Op.n $\frac{\partial}{\partial x}$, ∂_λ oder $\frac{\partial}{\partial y}$, $\partial^{\bar{\lambda}}$ verwenden, wobei

$$(56) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \partial_\lambda f = f_\lambda = f_y - \lambda(x, y) f_x, \qquad &&\text{(b)}\quad f_y = f_\lambda + \lambda f_x, \\ &\text{(ā)}\quad \partial^{\bar{\lambda}} f = f^{\bar{\lambda}} = f_x - \bar{\lambda}(x, y) f_y, \qquad &&\text{(b̄)}\quad f_x = f^{\bar{\lambda}} + \bar{\lambda} f_y, \end{aligned}$$

unter λ, $\bar{\lambda}$ ein zunächst noch beliebiges Funktionenpaar verstanden. Die Rolle der Beziehung $f_{yx} = f_{xy}$ übernimmt dann eine dieser beiden

$$(57) \qquad \text{(a)}\quad f_{x\lambda} - f_{\lambda x} - \lambda_x f_x = 0, \qquad \text{(ā)}\quad f_y{}^{\bar{\lambda}} - f^{\bar{\lambda}}{}_y - \bar{\lambda}_y f_y = 0.$$

Die Gleichungen (56 a, b) unterscheiden sich von (56 ā, b̄) durch die Substitution

$$(58) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(\lambda\bar{\lambda})\,(\partial_\lambda \partial^{\bar{\lambda}}),$$

ebenso — als Folge davon — die Gleichung (57 a) von (57 ā).

Wir denken uns jetzt in den Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Op.

$$\partial_{\mathfrak{l}} = f_{\mathfrak{l}} = f_{\mathfrak{y}} - \mathfrak{l}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) f_{\mathfrak{x}} \tag{59}$$

gebildet. Es erhebt sich dann die Frage, ob die Op.n $f_{\mathfrak{x}}, f_{\mathfrak{l}}$ durch eine Trf. (1) so in die Op.n f_x, f_λ transformiert werden können, daß möglichst einfache Trf.s-Formeln gelten, etwa derart, daß $f_{\mathfrak{l}}$ und f_λ *gleichzeitig* verschwinden. Aus (50 b) folgt

$$f_{\mathfrak{l}} = \frac{1}{D}\left((X_x + Y_x \mathfrak{l}) f_y - (X_y + Y_y \mathfrak{l}) f_x\right). \tag{60}$$

Wir erhalten demnach die gewünschten Trf.s-Formeln, wenn wir setzen

$$\text{(a)} \quad \lambda = \frac{X_y + Y_y \mathfrak{l}}{X_x + Y_x \mathfrak{l}}, \qquad \text{(b)} \quad \mathfrak{l} = -\frac{X_\lambda}{Y_\lambda}. \tag{61}$$

Wegen

$$D = X_x Y_y - X_y Y_x = X_x Y_\lambda - X_\lambda Y_x \tag{62}$$

bekommen wir aus (60) vermöge (61) an Stelle von (50 b):

$$f_{\mathfrak{l}} = \frac{1}{Y_\lambda} f_\lambda, \qquad f_{\mathfrak{x}} = \frac{1}{D}\left(Y_\lambda f_x - Y_x f_\lambda\right). \tag{63}$$

Da nun die Größen $f_{\mathfrak{x}}, f_{\mathfrak{y}}, f_{\mathfrak{l}}$ in (50 b) und (60) bei Vertauschung von $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ nicht geändert werden, müssen auch die Beziehungen richtig sein, die sich aus (61) und (63) vermittels der Substitution (58) ergeben:

$$\text{(a)} \quad \bar{\lambda} = \frac{X_x + Y_x \mathfrak{l}}{X_y + Y_y \mathfrak{l}} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{(b)} \quad \mathfrak{l} = -\frac{X^{\bar{\lambda}}}{Y^{\bar{\lambda}}}; \tag{64}$$

$$f_{\mathfrak{l}} = \frac{1}{Y^{\bar{\lambda}}} f^{\bar{\lambda}}, \qquad f_{\mathfrak{x}} = \frac{1}{\bar{D}}\left(Y^\lambda f_y - Y_y f^{\bar{\lambda}}\right), \tag{65}$$

$$\bar{D} = X_y Y_x - X_x Y_y = X_y Y^{\bar{\lambda}} - X^{\bar{\lambda}} Y_y = -D. \tag{65'}$$

Wir wollen uns jetzt das System (37) in den Op.n $\partial_\lambda, \frac{\partial}{\partial x}$ und das System (54) in den Op.n $\partial^{\bar{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial y}$ geschrieben denken. Verstehen wir dann unter $\bar{F}$ die Größe, welche aus F durch die *beiden* Substitutionen (55) und (58) hervorgebracht wird und schreiben wir

$$\mathfrak{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(\lambda\bar{\lambda})\,(\partial_\lambda \partial^{\bar{\lambda}})\,(\xi\eta)\,(F\bar{F}) \qquad (\lambda\bar{\lambda} = 1!), \tag{66}$$

dann läßt sich der Satz 10 ergänzen zu

Satz 11. *Der Satz* 10 *bleibt bei sinngemäßer Abänderung richtig, wenn wir an die Stelle der Substitution* (55) *die Substitution* $\mathfrak{S}$ *treten lassen.*

Die Trf.s-Formeln (61) erscheinen noch in zwei anderen Zusammenhängen; die gewöhnliche Diffgl. 1. O.

$$\mathfrak{l}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\mathfrak{y}' + 1 = 0 \tag{67}$$

geht nämlich bei Ausübung der Trf. (1) mit Rücksicht auf (3) in die Diffgl.

$$\lambda(xy)y' + 1 = 0 \tag{68}$$

über, worin λ den Wert (61a) besitzt. Der innere Grund dafür ist darin zu finden, daß die Lösungskurven zu (67) durch die Lösung der partiellen linearen homogenen Diffgl. 1. O.

$$f_{\mathfrak{l}} = f_{\mathfrak{y}} - \mathfrak{l} f_{\mathfrak{x}} = 0 \tag{69}$$

bestimmt werden, und ebenso die Lösungskurven zu (68) durch die Lösung der Diffgl.

$$f_\lambda = f_y - \lambda f_x = 0; \tag{70}$$

die Diffgl. (69) muß daher vermöge (1) in (70) verwandelt werden — aber gerade diese Forderung führte ja auf die Formeln (61), (63)!

Ferner wird aus der Gleichung

$$\hat{\xi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = -\mathfrak{l}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\,\hat{\eta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{71}$$

durch die Trf. (1) wegen (49a) die Gleichung

$$\xi(x, y) = -\lambda(x, y)\eta(x, y), \tag{72}$$

wo λ wieder den Wert (61a) annimmt. Auch dafür läßt sich der Grund ohne weiteres angeben; die Gleichung (71) bzgl. (72) definiert nämlich eine unendliche Gruppe, und zwar die *größte* (*intransitive*) Gruppe mit den durch die Diffgl. (67) bzgl. (68) bestimmten *Bahnkurven*, also die *größte* Gruppe, welche die *eine* wesentliche Lösung von (69) bzgl. (70) als Invariante besitzt.

In den folgenden Untersuchungen werden wir die Formeln (61)—(65′) nur in der speziellen Form anwenden, die sich für $\mathfrak{l} = 0$ einstellt:

$$\text{(73)}\quad \text{(a)}\quad \lambda = \frac{X_y}{X_x}, \qquad \text{(b)}\quad X_\lambda = 0, \qquad (\bar{a})\quad \bar{\lambda} = \frac{X_x}{X_y} = \frac{1}{\lambda}, \qquad (\bar{b})\quad X^{\bar{\lambda}} = 0,$$

$$\text{(74)}\quad \begin{cases} \text{(a)} & f_\mathfrak{y} = \dfrac{1}{Y_\lambda} f_\lambda, \quad f_\mathfrak{x} = \dfrac{1}{X_x} f_x - \dfrac{Y_x}{D} f_\lambda = \dfrac{1}{X_x} f_x - \dfrac{Y_x}{X_x} f_\mathfrak{y}, \\ (\bar{a}) & f_\mathfrak{y} = \dfrac{1}{Y^{\bar{\lambda}}} f^{\bar{\lambda}}, \quad f_\mathfrak{x} = \dfrac{1}{X_y} f_y - \dfrac{Y_y}{\overline{D}} f^{\bar{\lambda}} = \dfrac{1}{X_y} f_y - \dfrac{Y_y}{X_y} f_\mathfrak{y}, \end{cases}$$

$$\text{(75)}\qquad \text{(a)}\quad D = X_x Y_\lambda, \qquad (\bar{a})\quad \overline{D} = X_y Y^{\bar{\lambda}} = -D.$$

5. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zu dem eigentlichen Thema dieses Paragraphen. Die Defgl.n der $\mathcal{G}_{n+1}$ (11) mit der $\mathcal{D}_n$ (2) lauten:

$$\text{(76)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \hat{\xi} = 0, \quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} = 0, \quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}} = 0, \\ &\text{(b)} \quad \frac{\partial^n \hat{\eta}}{\partial \mathfrak{x}^n} = a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \hat{\eta}}{\partial \mathfrak{x}^{n-1}} + \cdots + a_1 \hat{\eta}_\mathfrak{x} + a_0 \hat{\eta} - a_0 \mathfrak{y} \hat{\eta}_\mathfrak{y}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (49) und (50) ließen sich aus ihnen direkt die Defgl.n der allgemeinsten $\mathcal{G}_{n+1}$ herleiten. Es empfiehlt sich jedoch, namentlich mit Rücksicht auf die späteren Untersuchungen über Berührungs-Trf.n, zuvor gewisse *unendliche* Gruppen zu behandeln.

Die Gruppe (11) ist Untergruppe der beiden unendlichen Gruppen

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\mathfrak{q}; \qquad \hat{\xi} = 0, \tag{77}$$

$$\mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \mathfrak{Q}(\mathfrak{x})\mathfrak{q}; \qquad \hat{\xi} = 0, \quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} = 0, \quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}} = 0, \tag{78}$$

unter $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{Q}$ *arbiträre* Funktionen verstanden. (77) ist die *größte* Gruppe mit der Invarianten $\mathfrak{x}$ der Gruppe (11). *Die Derivierte der Gruppe* (11):

$$\mathfrak{Q}_1(\mathfrak{x})\mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{Q}_n(\mathfrak{x})\mathfrak{q} \tag{79}$$

ist Untergruppe der unendlichen Gruppe

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{x})\mathfrak{q}; \qquad \hat{\xi} = 0, \quad \hat{\eta}_\mathfrak{y} = 0, \tag{80}$$

der Derivierten von (78). Für die mit einer Gruppe (79) ähnlichen Gruppen führen wir die Bezeichnung $\mathcal{G}_n$ ein (es ist also z. B. $\mathcal{G}_{2+1}$ von $\mathcal{G}_3$ zu unterscheiden!) und für die unendlichen Gruppen vom Typus (77), (78), (80) die Bezeichnungen $\mathcal{G}, \mathcal{G}_{\infty+1}, \mathcal{G}_\infty$. Die allgemeinste Gruppe $\mathcal{G}$ ist natürlich definiert durch (72), und zwar hat λ den Wert (73a). Das erkennt man auch direkt, denn die Trf. (1) verwandelt die Invariante $\mathfrak{x}$ von (77) in $X(x, y)$, und $\xi X_x + \eta X_y = 0$ ist die Defgl. für alle inf. Trf.n mit der Invariante X. Jede Funktion $\lambda(x, y)$ bestimmt also eine Gruppe $\mathcal{G}$, präzis $\mathcal{G}(\lambda)$, und umgekehrt.

Die Gleichungen (49a) lassen sich so fassen:

$$\hat{\xi} = X_x(\xi + \lambda\eta), \qquad \hat{\eta} = Y_\lambda \eta + \frac{Y_x}{X_x}\hat{\xi}; \tag{81}$$

daraus folgt wegen (74 a) mit Rücksicht auf (57 a), (73 b)

$$\hat{\eta}_\mathfrak{y} = \eta_\lambda - \varphi\eta + \frac{Y_x}{X_x}\hat{\xi}_\mathfrak{y} + \frac{1}{X_x}\frac{Y_{\lambda x}}{Y_\lambda}\hat{\xi}, \tag{82}$$

$$\varphi = -\frac{Y_{\lambda\lambda}}{Y_\lambda}. \tag{82'}$$

Ferner folgt aus (74 a)

$$\hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} = \frac{1}{Y_\lambda}\hat{\eta}_{\mathfrak{y}\lambda}, \qquad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}} = \frac{1}{X_x}\hat{\eta}_{\mathfrak{y}x} - \frac{Y_x}{X_x}\hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}}. \tag{83}$$

Die Defgl.n der transformierten Gruppen (80) und (78) lauten daher nach (82) und (83):

(84) $\mathcal{G}_\infty(\lambda, \varphi)$: $\quad \xi = -\lambda\eta, \quad \eta_\lambda = \varphi\eta,$

(85) $\mathcal{G}_{\infty+1}(\lambda, \varphi)$: $\quad \xi = -\lambda\eta, \quad \eta_{\lambda\lambda} = (\varphi\eta)_\lambda, \quad \eta_{\lambda x} = (\varphi\eta)_x.$

(84) *ist die Derivierte zu* (85). Die Größen λ, φ sind ganz willkürlich wählbar.

6. Nunmehr unternehmen wir die Trf. des Systems (76). Setzen wir für den Augenblick

$$\frac{1}{X_x}f_x = Zf, \tag{86}$$

dann wird auf Grund von (74a) vermöge $\hat{\eta}_{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} = \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}} = 0$:

$$\frac{\partial^i\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^i} = \frac{1}{X_x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{i-1}\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^{i-1}} = Z\frac{\partial^{i-1}\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^{i-1}} = Z^2\frac{\partial^{i-2}\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^{i-2}} = \cdots = Z^{i-1}\hat{\eta}_\mathfrak{x} \quad (i = 1, 2, \ldots);$$

daraus erhalten wir wegen $\hat{\eta}_\mathfrak{x} = Z\hat{\eta} - ZY\cdot\hat{\eta}_\mathfrak{y}$, da nach (83) zugleich mit $\hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}}$, $\hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}$ auch $\hat{\eta}_{\mathfrak{y}x}$ verschwindet,

$$\frac{\partial^i\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^i} = Z^i\hat{\eta} - (Z^iY)\hat{\eta}_\mathfrak{y} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{87}$$

(87) in Verbindung mit (81), (82), (76a) liefert die Gestalt der transformierten Gleichung (76b), so daß wir als Defgl.n der allgemeinsten $\mathcal{G}_{n+1}$ die folgenden Gleichungen bekommen:

(88) $\mathcal{G}_{n+1}(\lambda)$:

(a) $\quad \xi = -\lambda\eta, \quad \eta_{\lambda\lambda} = (\varphi\eta)_\lambda, \quad \eta_{\lambda x} = (\varphi\eta)_x,$

(b) $\quad \dfrac{\partial^n\eta}{\partial x^n} = \alpha_{n-1}\dfrac{\partial^{n-1}\eta}{\partial x^{n-1}} + \cdots + \alpha_1\eta_x + \alpha_0\eta + \beta\eta_\lambda.$

Vermöge (88) bleiben die $n+1$ Op.n

$$\eta_\lambda, \ \eta, \ \eta_x, \ \ldots, \ \frac{\partial^{n-1}\eta}{\partial x^{n-1}} \tag{88'}$$

willkürlich. Die *Derivierte* zu (88) ist die *Durchschnittsgruppe* der Gruppen (88) und (84), denn die Derivierte zu (11), also die Gruppe (79), ist ja der Durchschnitt aus den Gruppen (11) und (80); folglich bestehen die Defgl.n der transformierten Gruppe (79) aus den Defgl.n (88) + (84):

(89) $\mathcal{G}_n(\lambda)$:

(a) $\quad \xi = -\lambda\eta, \quad \eta_\lambda = \varphi\eta,$

(b) $\quad \dfrac{\partial^n\eta}{\partial x^n} = \alpha_{n-1}\dfrac{\partial^{n-1}\eta}{\partial x^{n-1}} + \cdots + \alpha_1\eta_x + (\alpha_0 + \varphi\beta)\eta.$

Zu dem System (88) müssen wir die charakteristischen Koeffizienten-Bedingungen aufsuchen. *Wir gewinnen sie sämtlich durch Aufstellung der Int. Bed.n; die Gr.-Bed.n sind dann von selbst erfüllt.* Das läßt sich folgendermaßen einsehen. Da wir die Gleichungen (88 a) jederzeit in (78) überführen können, so läßt das System (88 a, b) mit Rücksicht auf (87) stets eine Transformation in die Form

$$(90)\qquad \text{(a)}\quad \hat{\xi}=0,\quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}}=0,\quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}=0,$$
$$\text{(b)}\quad \frac{\partial^n\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^n}=\mathfrak{a}_{n-1}\frac{\partial^{n-1}\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^{n-1}}+\cdots+\mathfrak{a}_1\hat{\eta}_{\mathfrak{x}}+\mathfrak{a}_0\hat{\eta}+\mathfrak{b}\hat{\eta}_{\mathfrak{y}}$$

zu. Nun ist es klar, daß das System (90) ebenfalls unbeschränkt integrabel sein wird, wenn dies für das System (88) zutrifft. Unsere Behauptung ist daher bewiesen, wenn jedes integrable System (90) eine $\mathcal{G}_{n+1}$ definiert. Die Int.-Bed.n zu (90) folgen offenbar sämtlich aus der Forderung $\dfrac{\partial^{n+1}\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^n\,\partial\mathfrak{y}}=0$ und lauten

$$(90')\qquad \mathfrak{a}_{n-1,\mathfrak{y}}=\cdots=\mathfrak{a}_{1\mathfrak{y}}=\mathfrak{a}_{0\mathfrak{y}}=0,\qquad \mathfrak{b}_{\mathfrak{y}}=-\mathfrak{a}_0.$$

Demnach hängen $\mathfrak{a}_{n-1},\ldots,\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_0$ *nur von* $\mathfrak{x}$ *ab, während*

$$(90'')\qquad \mathfrak{b}=-\mathfrak{a}_0\mathfrak{y}+\mathfrak{b}_0(\mathfrak{x}).$$

Daraus schließt man leicht, daß die durch (90) definierten inf. Trf.n sich linear zusammensetzen lassen aus den folgenden $n+1$ inf. Trf.n

$$(91)\qquad \mathfrak{Q}_1(\mathfrak{x})\,\mathfrak{q},\ldots,\mathfrak{Q}_n(\mathfrak{x})\,\mathfrak{q},\qquad(\mathfrak{y}+\mathfrak{g}(\mathfrak{x}))\,\mathfrak{q},$$

wo $\mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_n$ ein fundamentales Lösungssystem der Diffgl.

$$(91')\qquad \mathfrak{y}^{(n)}-\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{y}^{(n-1)}-\cdots-\mathfrak{a}_1\mathfrak{y}'-\mathfrak{a}_0\mathfrak{y}=0$$

und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ irgend eine Lösung der Diffgl.

$$(91'')\qquad \mathfrak{y}^{(n)}-\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{y}^{(n-1)}-\cdots-\mathfrak{a}_1\mathfrak{y}'-\mathfrak{a}_0\mathfrak{y}=\mathfrak{b}_0$$

bedeutet. $n+1$ inf. Trf.n der Form (91) erzeugen nun tatsächlich eine $\mathcal{G}_{n+1}$.

Zur Berechnung der Int.-Bed.n des Systems (88) dient die Identität (57 a), aus der wir durch Ausübung der Op.n $\dfrac{\partial}{\partial x}$, ∂_λ sowie durch Substitution von f_x, f_λ an Stelle von f die Identitäten 3., 4., ... Ordnung gewinnen, welche zwischen den Op.n $f_{z_1z_2z_3}, f_{z_1z_2z_3z_4},\ldots$ $(z_i=x,\lambda)$ von 3., 4., ... Ordnung bestehen. Wir wollen diese Identitäten kurz die *∂-Relationen* nennen. Von den ∂-Relationen sind in der Folge die Relationen wichtig, die durch Einsetzen von $\dfrac{\partial^{m-1}f}{\partial x^{m-1}}$ für f aus (57 a) hervorgehen:

$$(92)\qquad \left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)_\lambda=\left(\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x^{m-1}}\right)_{\lambda x}+\lambda_x\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\qquad(m=1,2,\ldots).$$

Diese Relationen können wir auch in die Form bringen

$$(92')\qquad \left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)_\lambda=\frac{\partial^m f_\lambda}{\partial x^m}+\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\frac{\partial^i\lambda}{\partial x^i}\frac{\partial^{m+1-i}f}{\partial x^{m+1-i}}\qquad(m=1,2,\ldots);$$

für $m=1$ ist (92′) mit (57 a) identisch; ihre allgemeine Richtigkeit beweist man durch den Schluß von m auf $m+1$, indem man in (92′) f durch f_x ersetzt.

Die zweite und dritte Gleichung (88a) gestatten es, alle Op.n $\eta_{z_1\ldots z_m}$ $(z_1,\ldots,z_m=x,\lambda)$, unter deren Indizes z_i wenigstens einmal λ auftritt, durch $\eta_\lambda, \eta, \eta_x,\ldots,\dfrac{\partial^{m-1}\eta}{\partial x^{m-1}}$ auszudrücken:

$$(93)\qquad \eta_{z_1\ldots z_m}=w^{(z_1\cdots z_m)}\left(\eta_\lambda,\ \eta,\ \eta_x,\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1}\eta}{\partial x^{m-1}}\right)$$
$$(m\geqq 2;\ z_1,\ldots,z_m=x,\lambda,\quad\text{aber nicht } \textit{alle}=x).$$

Diese Formel ist richtig für $m = 2$; ihre Richtigkeit für $m + 1$ folgt durch Ausübung von $\frac{\partial}{\partial x}$, ∂_λ auf (93) sowie aus der Identität (92) oder (92′). Da wir wissen, daß die Gleichungen (88 a) eine unendliche Gruppe definieren, so ist a priori sicher, daß die Relationen (93) mit den ∂-Relationen für η verträglich sind. Lediglich die Verträglichkeit der Relationen (92) oder (92′) für $f = \eta$ und $m \geqq n$ mit der Relation (88 b) bedarf noch eines Nachweises oder muß vielmehr durch Int.-Bed.n sichergestellt werden. Es genügt übrigens eine derartige Sicherstellung für $m = n$, dadurch ist sie auch für $m > n$ mitgeleistet. Zur Durchführung der Rechnung bedienen wir uns der Formel (92′), welche für $f = \eta$ vermöge (88 a) die Form annimmt

$$(94) \qquad \left(\frac{\partial^m \eta}{\partial x^m}\right)_\lambda = \sum_{i=1}^{m+1} \left(\binom{m}{i-1} \frac{\partial^{i-1} \varphi}{\partial x^{i-1}} + \binom{m}{i} \frac{\partial^i \lambda}{\partial x^i} \right) \frac{\partial^{m+1-i} \eta}{\partial x^{m+1-i}} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Wir haben somit den Satz:

Satz 12. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß durch* (88) *eine* $\mathcal{G}_{n+1}$ *definiert werde, findet man, indem man die Op.* $\left(\frac{\partial^n \eta}{\partial x^n}\right)_\lambda$ *sowohl aus* (88 b) *wie aus* (94) *bestimmt und in beiden Ausdrücken die Koeffizienten der Op.n* (88′) *einander gleichsetzt.*

7. Die Defgl.n der $\mathcal{G}^1_{n+1}$ (34′) mit der $\mathcal{D}_n$ (34) sind

$$(95) \qquad \begin{aligned} &(a) \quad \hat{\xi}_\mathfrak{y} = 0, \quad \hat{\xi}_\mathfrak{x} = 0; \qquad (b) \quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} = 0, \quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}} = 0; \\ &(c) \quad \frac{\partial^n \hat{\eta}}{\partial \mathfrak{x}^n} = \hat{c}_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \hat{\eta}}{\partial \mathfrak{x}^{n-1}} + \cdots + \hat{c}_1 \hat{\eta}_\mathfrak{x} + \hat{c}_0 \hat{\eta} - \hat{c}_0 \mathfrak{y} \hat{\eta}_\mathfrak{y}. \end{aligned}$$

Auch dieses System transformieren wir auf dem Umweg über einige unendliche Gruppen. Die Gruppe (34′) steckt nämlich in den beiden unendlichen Gruppen

$$(96) \qquad \mathfrak{p}, \ \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\mathfrak{q}; \qquad \hat{\xi}_\mathfrak{y} = 0, \quad \hat{\xi}_\mathfrak{x} = 0,$$

$$(97) \qquad \mathfrak{p}, \ \mathfrak{y}\mathfrak{q}, \ \mathfrak{Q}(\mathfrak{x})\mathfrak{q}; \qquad \hat{\xi}_\mathfrak{y} = 0, \quad \hat{\xi}_\mathfrak{x} = 0; \quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} = 0, \quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}} = 0,$$

unter $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{Q}$ arbiträre Funktionen ihrer Argumente verstanden. Aus (81) folgt nun vermöge (74 a)

$$(98) \qquad \hat{\xi}_\mathfrak{y} = \frac{X_x}{Y_\lambda} \left((\xi + \lambda\eta)_\lambda + \lambda_x (\xi + \lambda\eta) \right), \qquad \hat{\xi}_\mathfrak{x} = (\xi + \lambda\eta)_x - v(\xi + \lambda\eta) - \frac{Y_x}{X_x} \hat{\xi}_\mathfrak{y},$$

$$(98') \qquad v = -\frac{X_{xx}}{X_x};$$

bezeichnen wir die mit (96) ähnlichen Gruppen mit $\mathcal{G}^1$, dann lauten ihre Defgl.n nach (98) und (96):

$$(99) \qquad \boxed{\mathcal{G}^1(\lambda, v): \ \xi_\lambda = -\lambda\eta_\lambda - \lambda_x \xi - (\lambda_\lambda + \lambda\lambda_x \eta), \ \ \xi_x = -\lambda\eta_x + v\xi + (-\lambda_x + \lambda v)\eta.}$$

Für v haben wir dabei die Relation

$$(100) \qquad \boxed{v_\lambda = \lambda_x v - \lambda_{xx},}$$

die sich vermöge der beiden Diffgl.n (73 b) und (98′) oder

$$(100') \qquad X_\lambda = 0, \quad X_{xx} = -vX_x$$

ergibt, wenn wir X an Stelle von f in (92′) für $m = 2$ einsetzen; auf Grund von (100) sind die Diffgl.n (100′) integrabel und die allgemeinste Lösung X hängt von zwei Konstanten ab.

Es wäre an sich ebenso einfach, die Gleichungen (97) direkt zu transformieren;

jedoch um der späteren Anwendung auf Berührungs-Trf.n willen schalten wir noch die Transformation der unendlichen Gruppe

$$(101) \qquad \mathfrak{p},\ \mathfrak{Q}(\mathfrak{x})\mathfrak{q};\qquad \hat{\xi}_{\mathfrak{y}} = 0,\quad \hat{\xi}_{\mathfrak{x}} = 0,\quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}} = 0$$

ein, die in (97) steckt. Die mit (97) und (101) ähnlichen Gruppen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}^1_{\infty+1}$ und $\mathcal{G}^1_{\infty}$. Aus (82) folgt wegen $\hat{\xi}_{\mathfrak{y}} = 0$

$$(102) \qquad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}} = \eta_\lambda - \varphi\eta - \frac{1}{X_x}\, v'\hat{\xi},$$

$$(102') \qquad v' = -\frac{Y_{\lambda x}}{Y_\lambda},$$

so daß die Defgl.n der allgemeinen $\mathcal{G}^1_{\infty}$ gegeben sind durch

$$(103) \quad \mathcal{G}^1_{\infty}(\lambda, \varphi, v, v'): \quad \begin{aligned} \xi_\lambda &= -\lambda\eta_\lambda - \lambda_x\xi - (\lambda_\lambda + \lambda\lambda_x)\eta, \\ \xi_x &= -\lambda\eta_x + v\xi + (-\lambda_x + \lambda v)\eta,\quad \eta_\lambda = v'\xi + (\varphi + \lambda v')\eta. \end{aligned}$$

Für v' haben wir die Beziehung

$$(103') \qquad v'_\lambda = \lambda_x v' + \varphi_x,$$

die sich vermöge der Gleichungen (82′) und (102′) oder

$$(104) \qquad Y_{\lambda\lambda} = -\varphi Y_\lambda,\qquad Y_{\lambda x} = -v' Y_\lambda$$

einstellt, wenn wir Y_λ in (57 a) an Stelle von f einsetzen. Wegen (103′) sind die Diffgl.n (104), aufgefaßt als Gleichungen für Y_λ, unbeschränkt integrabel, und die allgemeinste Lösung Y_λ hängt von *einer* Konstanten ab. Es gibt also ∞^∞ Lösungen Y von (104).

In der Gruppe (97) stecken die ∞^1 Untergruppen

$$(105) \qquad \mathfrak{p} + c\mathfrak{y}\mathfrak{q},\ \ \mathfrak{Q}(\mathfrak{x})\mathfrak{q};\qquad \hat{\xi}_{\mathfrak{y}} = 0,\quad \hat{\xi}_{\mathfrak{x}} = 0,\quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}} = c\hat{\xi},$$

die durch die Trf. $x = \mathfrak{x}$, $y = e^{-c\mathfrak{x}}\mathfrak{y}$ in $p, Q(x)q$ übergehen und somit dem Typus $\mathcal{G}^1_{\infty}$ angehören. Durch die Trf. (1) verwandelt sich die Gruppe (105) wieder in eine Gruppe (103), wobei jetzt v' durch die Formel

$$(106) \qquad v' = -\frac{Y_{\lambda x}}{Y_\lambda} + cX_x$$

gegeben ist.

Aus den Gleichungen (97) erhalten wir mittels der Trf. (1) nach (83), (102) und (81) (denn aus $\hat{\xi}_{\mathfrak{y}} = \hat{\xi}_{\mathfrak{x}} = 0$ folgt $\hat{\xi}_\lambda = \hat{\xi}_x = 0$) die nachstehenden Defgl.n der allgemeinen $\mathcal{G}^1_{\infty+1}$

$$(107) \quad \boxed{\mathcal{G}^1_{\infty+1}(\lambda, \varphi, v, \mu): \quad \begin{aligned} \xi_\lambda &= -\lambda\eta_\lambda - \lambda_x\xi - (\lambda_\lambda + \lambda\lambda_x)\eta,\quad \xi_x = -\lambda\eta_x + v\xi + (-\lambda_x + \lambda v)\eta, \\ \eta_{\lambda\lambda} &= \varphi\eta_\lambda + \varphi_x\xi + (\varphi_\lambda + \lambda\varphi_x)\eta,\quad \eta_{\lambda x} = \varphi\eta_x + \mu\xi + (\varphi_x + \lambda\mu)\eta, \end{aligned}}$$

$$(107') \qquad \mu = v'_x + vv'.$$

μ befriedigt die Relation

$$(108) \qquad \boxed{\mu_\lambda = 2\lambda_x\mu + \varphi_x v + \varphi_{xx}.}$$

Die Gruppe (107) muß nämlich nach der obigen Bemerkung ∞^1 Untergruppen (103) enthalten; die Gleichungen (107) sind dann und nur dann eine Folge von (103), wenn v' der Bedingung (107′) genügt. Aus den Diffgl.n (107′) und (103′) müssen daher ∞^1 Grössen v' bestimmt werden können, und die entsprechende Int.Bed. dafür ist (108).

Da die Derivierte der Gruppe (97) durch (80) dargestellt wird, *ist die Gruppe* (84) *die Derivierte der Gruppe* (107).

8. Nehmen wir an, daß die Defgl.n der invarianten $\mathcal{G}_{n+1}$ der $\mathcal{G}^1_{n+1}$ (95) durch die Trf. (1) in (88) übergehen, dann verwandeln sich die Gleichungen (95) selber durch die Trf. (1) in Gleichungen der Form

$$(109)\qquad \mathcal{G}^1_{n+1}(\lambda):\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \hat{\xi}_\lambda = -\lambda\eta_\lambda - \lambda_x\xi - (\lambda_x + \lambda\lambda_x)\eta, \quad \xi_x = -\lambda\eta_x + \nu\xi + (-\lambda_x + \lambda\nu)\eta,\\ &\text{(b)}\quad \eta_{\lambda\lambda} = \varphi\eta_\lambda + \varphi_x\xi + (\varphi_\lambda + \lambda\varphi_x)\eta, \quad \eta_{\lambda x} = \varphi\eta_x + \mu\xi + (\varphi_x + \lambda\mu)\eta,\\ &\text{(c)}\quad \frac{\partial^n\eta}{\partial x^n} = \alpha_{n-1}\frac{\partial^{n-1}\eta}{\partial x^{n-1}} + \cdots + \alpha_1\eta_x + \vartheta\xi + (\alpha_0 + \lambda\vartheta)\eta + \beta\eta_\lambda . \end{aligned}$$

Die Gleichung (109 c) bekommen wir aus (95 c) wieder mit Hilfe von (87) unter Berücksichtigung von $\hat{\xi}_x = 0$. Vermöge (109) bleibt außer den Op.n (88′) noch ξ willkürlich. *Die Derivierte der Gruppe* (109) *ist die Gruppe* (89), denn (79) ist die Derivierte von (34′). Um die Gr. Bed.n zu dem System (109) aufzustellen, brauchen wir also die Größen (40) oder

$$(110)\qquad \tilde{\xi} = (\xi\xi_x) + (\eta\xi_\lambda) + \lambda(\eta\eta_x), \qquad \tilde{\eta} = (\xi\eta_x) + (\eta\eta_\lambda) + \lambda(\eta\eta_x)$$

lediglich in (89 b) einzusetzen und die so entstehende Relation vermöge (109) auszurechnen; denn die Größen (110) befriedigen die Gleichungen (89 a) schon vermöge (109 a,b) (s. Schlußbemerkung von Ziffer **7**). Es läßt sich zeigen, *daß die so gewonnenen Koeffizienten-Relationen zu* (109) *zusammen mit den Int. Bed.n zu* (88) *und den Relationen* (100) *und* (108) *notwendig und hinreichend sind, damit* (109) *eine* $\mathcal{G}^1_{n+1}$ *definiert.* Zum Beweise transformieren wir — was wegen (100) und (108) immer angeht — die Gleichungen (109 a, b) in (97), wodurch vermöge (87) das System (109) in ein System der Gestalt

$$(111)\qquad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \hat{\xi}_\mathfrak{y} = 0, \quad \hat{\xi}_\mathfrak{x} = 0; \qquad \text{(b)}\quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} = 0, \quad \hat{\eta}_{\mathfrak{y}\mathfrak{x}} = 0;\\ &\text{(c)}\quad \frac{\partial^n\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^n} = \mathfrak{a}_{n-1}\frac{\partial^{n-1}\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^{n-1}} + \cdots + \mathfrak{a}_1\hat{\eta}_\mathfrak{x} + \hat{\vartheta}\hat{\xi} + \mathfrak{a}_0\hat{\eta} + \mathfrak{b}\hat{\eta}_\mathfrak{y} \end{aligned}$$

verwandelt wird, während (88) in (90) übergeht. Denn das System (109) wird im Falle $\xi = -\lambda\eta$ auf das System (88) reduziert, also muß (109) in ein System übergehen, das sich für $\hat{\xi} = 0$ auf (90) reduziert. $\mathfrak{a}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}$ genügen dann den Relationen (90′). Die Derivierte (89) von (88) geht natürlich über in die Derivierte von (90):

$$(112)\qquad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \hat{\xi} = 0, \quad \hat{\eta}_\mathfrak{y} = 0,\\ &\text{(b)}\quad \frac{\partial^n\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^n} = \mathfrak{a}_{n-1}\frac{\partial^{n-1}\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^{n-1}} + \cdots + \mathfrak{a}_1\hat{\eta}_\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_0\hat{\eta}. \end{aligned}$$

Vermöge (111) wird (s. (110))

$$(113)\qquad \tilde{\hat{\xi}} = 0, \qquad \tilde{\hat{\eta}} = (\hat{\xi}\hat{\eta}_\mathfrak{x}) + (\hat{\eta}\hat{\eta}_\mathfrak{y}).$$

Nun ist es klar, daß die Größen (113) das System (112) vermöge (111) befriedigen müssen, wenn die Größen (110) dem System (89) auf Grund von (109) genügen. Unsere vorhin ausgesprochene Behauptung ist daher bewiesen, wenn das System (111) eine $\mathcal{G}^1_{n+1}$ definiert, sobald $\tilde{\hat{\eta}}$ das System (112) vermöge (111) erfüllt. Durch Einsetzen von $\tilde{\hat{\eta}}$ in (112 b) finden wir wegen der aus (111 a, b) folgenden Formeln

$$(113')\qquad \frac{\partial^i\tilde{\hat{\eta}}}{\partial\mathfrak{x}^i} = \left(\hat{\xi}\frac{\partial^{i+1}\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^{i+1}}\right) + \left(\frac{\partial^i\hat{\eta}}{\partial\mathfrak{x}^i}\,\hat{\eta}_\mathfrak{y}\right) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Bedingungen

$$(114)\qquad \mathfrak{a}_{n-1,\mathfrak{x}} = \cdots = \mathfrak{a}_{1\mathfrak{x}} = \mathfrak{a}_{0\mathfrak{x}} = 0, \qquad \hat{\vartheta} = -\mathfrak{b}_\mathfrak{x},$$

die sich mit (90′) und (90″) zu dem Resultat vereinigen

$$(115)\qquad \mathfrak{a}_{n-1} = c_{n-1}, \ldots, \mathfrak{a}_1 = c_1, \quad \mathfrak{a}_0 = c_0, \quad \mathfrak{b} = -c_0\mathfrak{y} + b_0(\mathfrak{x}); \qquad \hat{\vartheta} = -\mathfrak{b}_0'(\mathfrak{x}).$$

Die durch (111) bestimmten inf. Trf.n setzen sich daher linear zusammen aus

$$(116) \qquad \mathfrak{Q}_1(\mathfrak{x})\,\mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{Q}_n(\mathfrak{x})\,\mathfrak{q}, (\mathfrak{y} + \mathfrak{g}(\mathfrak{x}))\,\mathfrak{q}; \qquad \mathfrak{p} - \mathfrak{g}'(\mathfrak{x})\,\mathfrak{q},$$

wobei $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ n linear unabhängige Lösungen der Diffgl.

$$(116') \qquad \mathfrak{y}^{(n)} - c_{n-1}\,\mathfrak{y}^{(n-1)} - \cdots - c_1\mathfrak{y}' - c_0\mathfrak{y} = 0$$

und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ irgendeine Lösung der Diffgl.

$$(116'') \qquad \mathfrak{y}^{(n)} - c_{n-1}\,\mathfrak{y}^{(n-1)} - \cdots - c_1\mathfrak{y}' - c_0\mathfrak{y} = \mathfrak{b}_0(\mathfrak{x})$$

bedeuten; die inf. Trf.n (116) erzeugen aber stets eine $\mathcal{G}_{n+1}$.

Für die Ausdrücke $\dfrac{\partial^m \tilde{\eta}}{\partial x^m}$ wollen wir jetzt eine explizite Formel herleiten. Durch Anwendung von (81) auf $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$; $\tilde{\tilde{\xi}}, \tilde{\tilde{\eta}}$ ergibt sich vermöge (113)

$$(117) \qquad \tilde{\eta} = \frac{1}{Y_\lambda}\,\tilde{\tilde{\eta}}.$$

Aus (117), (113), (81), (87) und (102′) folgt

$$(117') \qquad \tilde{\eta} = \frac{1}{X_x}(\hat{\xi}\eta_x) - \frac{\nu'}{X_x}(\hat{\xi}\eta) + (\eta\hat{\eta}_\mathfrak{y}).$$

Wegen $\hat{\xi}_x = \hat{\eta}_{\mathfrak{y}x} = 0$ läßt sich auf (117′) leicht die Op. $\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}$ anwenden. Um zu übersichtlichen Formeln zu gelangen, führen wir die Abkürzungen ein

$$(118) \qquad f_x + \nu f = f^{[1]}, (f^{[i]})_x + \nu f^{[i]} = f^{[i+1]} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots); \qquad f^{[0]} = f.$$

Dabei gilt die leicht durch Induktion zu bestätigende Beziehung

$$(118') \qquad f^{[m]} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} 1^{[i]}\,\frac{\partial^{m-i} f}{\partial x^{m-i}} \quad (1^{[0]} = 1,\ 1^{[1]} = \nu,\ 1^{[2]} = \nu^{[1]} \text{ usw.}).$$

Dann wird wegen (98′) und (107′)

$$(119) \qquad \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{1}{X_x}\right) = \frac{1}{X_x}\,1^{[i]} = \frac{1}{X_x}\,\nu^{[i-1]}, \qquad \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{\nu'}{X_x}\right) = \frac{1}{X_x}\,\nu'^{[i]} = \frac{1}{X_x}\,\mu^{[i-1]},$$

so daß wir aus (117′) mit Rücksicht auf (81) und (102) die gesuchte Formel erhalten:

$$(120) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^m \tilde{\eta}}{\partial x^m} &= \left(\xi\,\frac{\partial^{m+1}\eta}{\partial x^{m+1}}\right) + \lambda\left(\eta\,\frac{\partial^{m+1}\eta}{\partial x^{m+1}}\right) + m\nu\left(\xi\,\frac{\partial^m \eta}{\partial x^m}\right) + \left(\frac{\partial^m \eta}{\partial x^m}\,\eta_\lambda\right) \\ &\quad - (\varphi + m\lambda\nu)\left(\frac{\partial^m \eta}{\partial x^m}\,\eta\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(\binom{m}{i+1}\nu^{[i]} - \binom{m}{i}\mu^{[i-1]}\right)\left(\left(\xi\,\frac{\partial^{m-i}\eta}{\partial x^{m-i}}\right) + \lambda\left(\eta\,\frac{\partial^{m-i}\eta}{\partial x^{m-i}}\right)\right) \\ &\qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Ihrer Herleitung zufolge besteht diese Beziehung auf Grund von (111 a, b), also w. d. i. vermöge (109 a, b).

Den Ausdruck, welchen wir erhalten, wenn wir in (89b) alles auf die linke Seite ziehen, wollen wir für den Augenblick mit $L(\eta)$ bezeichnen. Dann wird vermöge (120) und (109):

$$(121) \qquad L(\tilde{\eta}) = \mathsf{A}(\xi\eta_\lambda) + \sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{A}_i\left(\xi\,\frac{\partial^i \eta}{\partial x^i}\right) + \mathsf{B}(\eta\eta_\lambda) + \sum_{i=1}^{n-1}\mathsf{B}_i\left(\eta\,\frac{\partial^i \eta}{\partial x^i}\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\Gamma_i\left(\eta_\lambda\,\frac{\partial^i \eta}{\partial x^i}\right).$$

Setzen wir in (121) $\xi = -\lambda\eta$, dann erhalten wir

$$(121') \qquad L(\tilde{\eta})_{\xi=-\lambda\eta} = (\mathsf{B} - \lambda\mathsf{A})(\eta\eta_\lambda) + \sum_{i=1}^{n-1}(\mathsf{B}_i - \lambda\mathsf{A}_i)\left(\eta\,\frac{\partial^i \eta}{\partial x^i}\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\Gamma_i\left(\eta_\lambda\,\frac{\partial^i \eta}{\partial x^i}\right).$$

Der Ausdruck (121′) verschwindet jedoch identisch, da vorausgesetzt wurde, daß die Gleichungen (88) eine $\mathcal{G}_{n+1}$ definieren und wir denselben Ausdruck wie in (121′) auch

bekommen müßten, wenn wir $L(\tilde{\eta})$ vermöge (88) ausrechnen würden. Also gilt

$$\mathsf{B} = \lambda\mathsf{A}, \quad \mathsf{B}_i = \lambda\mathsf{A}_i, \quad \Gamma_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{122}$$

und diese Relationen bestehen auf Grund der in Satz 12 genannten Int. Bed.n. Soll der Ausdruck (121) identisch verschwinden, so ist dazu nach (122) notwendig und hinreichend, daß

$$\mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{A}_i = 0 \qquad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{123}$$

Wir brauchen also zwecks Berechnung der Gr. Bed.n zu (109) von dem Ausdruck (121) nur die Glieder mit $(\xi\eta_\lambda)$, $\left(\xi\dfrac{\partial^i\eta}{\partial x^i}\right)$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ auszurechnen. Insgesamt haben wir den

Satz 13. *Das System* (109) *definiert eine* $\mathcal{G}^1_{n+1}$ *dann und nur dann, wenn die in Satz* 12 *angegebenen Relationen sowie die Relationen* (100), (108) *und* (123) *erfüllt sind.*

Endlich ergibt sich aus dem Satz 8 der Schluß:

Satz 14. *Die durch* (88) *definierte* $\mathcal{G}_{n+1}$ *ist eine* $\mathcal{G}^{\mathrm{I}}_{n+1}$, $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}_{n+1}$, $\mathcal{G}^{\mathrm{III}}_{n+1}$, *je nachdem aus den Relationen* (100), (108) *und* (123) 0, 1, ∞^2 *Größensysteme* ν, μ, ϑ *bestimmt werden können.*

9. Nunmehr wollen wir die Herleitung der zur Gruppe (88) gehörigen $\mathfrak{D}_n$ besprechen, die gemäß Ziffer **2** zu erfolgen hat. Wir setzen analog zu (43)

$$X^{(n)}f = \eta_\lambda Cf + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^i\eta}{\partial x^i}C_if = \eta_y Cf + \eta C_0f + \eta_x(C_1f - \lambda Cf) + \sum_{i=2}^{n-1}\frac{\partial^i\eta}{\partial x^i}C_if, \tag{124}$$

so daß Satz 9 für die Symbole $Cf, C_0f, C_1f - \lambda Cf, C_2f, \ldots, C_{n-1}f$ und damit auch für die Symbole $Cf, C_0f, \ldots, C_{n-1}f$ selber gilt. Ferner setzen wir wieder

$$\begin{aligned} Cf &= \Xi\, p + \mathsf{H}\, q + \mathsf{H}'q' + \cdots + \mathsf{H}^{(n)}q^{(n)}, \\ C_if &= \Xi_i p + \mathsf{H}_i q + \mathsf{H}_i'q' + \cdots + \mathsf{H}_i^{(n)}q^{(n)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{124'}$$

Es ist zweckmäßig, die Abkürzung zu gebrauchen

$$y^{(\lambda)} = 1 + \lambda y', \tag{125}$$

so daß wir die Formel bekommen

$$\frac{df}{dx} = f_x y^{(\lambda)} + f_\lambda y'. \tag{125'}$$

(9′) wird dann für $i = 0$ zu

$$\eta' = \eta_x y^{(\lambda)} + \eta_\lambda y' - (\xi_x y^{(\lambda)} + \xi_\lambda y')\, y'. \tag{126}$$

Daraus finden wir vermöge $\xi = -\lambda\eta$:

$$\Xi = 0, \ \mathsf{H} = 0, \ \mathsf{H}' = y^{(\lambda)}y'; \quad \Xi_0 = -\lambda, \ \mathsf{H}_0 = 1; \quad \Xi_1 = 0, \ \mathsf{H}_1 = 0, \ \mathsf{H}_1' = y^{(\lambda)2};$$

ferner ist

$$\Xi_i = 0, \ \mathsf{H}_i = 0, \ \mathsf{H}_i' = 0, \ldots, \ \mathsf{H}_i^{(i-1)} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n-1),$$

so daß die Matrix der $Cf, C_0f, \ldots, C_{n-1}f$ die Gestalt hat

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & y^{(\lambda)}y' & \mathsf{H}'' & \ldots & \ldots & \mathsf{H}^{(n)} \\ -\lambda & 1 & \mathsf{H}_0' & \mathsf{H}_0'' & \ldots & \ldots & \mathsf{H}_0^{(n)} \\ 0 & 0 & y^{(\lambda)2} & \mathsf{H}_1'' & \ldots & \ldots & \mathsf{H}_1^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \mathsf{H}_2'' & \ldots & \ldots & \mathsf{H}_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathsf{H}_{n-1}^{(n-1)} & \mathsf{H}_{n-1}^{(n)} \end{array} \right\|. \tag{127}$$

Der Rang dieser Matrix beträgt $n + 1$, denn sonst gäbe es im Widerspruch zu Satz 4 mehr als eine Invariante $I(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ der Gruppe (88). Von den $(n+1)$-reihigen

Determinanten der Matrix (127) sind nur zwei von Null verschieden; sie besitzen die Werte

$$\pm\, y^{(\lambda)}\Delta_n, \quad \pm\, \lambda y^{(\lambda)}\Delta_n, \tag{128}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} y' & \mathsf{H}'' & \dots & \mathsf{H}^{(n)} \\ y^{(\lambda)} & \mathsf{H}_1'' & \dots & \mathsf{H}_1^{(n)} \\ 0 & \mathsf{H}_2'' & \dots & \mathsf{H}_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathsf{H}_{n-1}^{(n-1)}\mathsf{H}_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \tag{128'}$$

Δ_n ist ein Polynom in $y', \dots, y^{(n)}$. Daß Δ_n auch wirklich von $y^{(n)}$ abhängt, davon überzeugen wir uns am einfachsten, indem wir die Determinante $\hat{\Delta}_n$ für die $\mathcal{G}_{n+1}$ (76) bilden; es wird nämlich

$$\hat{\Delta}_n = \pm\,(\mathfrak{y}^{(n)} - \mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{y}^{(n-1)} - \dots - \mathfrak{a}_1\mathfrak{y}' - \mathfrak{a}_0\mathfrak{y}). \tag{129}$$

Nach (128) gewinnen wir durch Nullsetzen der irreduziblen Faktoren von $y^{(\lambda)}\Delta_n$ invariante Diffgl.n der Gruppe (88). $y^{(\lambda)} = 0$ *ist die Diffgl. der Bahnkurven.* Δ_n kann indessen außer einem Faktor, der $y^{(n)}$ enthält, nur noch eine Potenz von $y^{(\lambda)}$ als Faktor aufweisen, denn sonst wäre im Widerspruch zu Satz 4 außer $y^{(\lambda)} = 0$ und der invarianten $\mathcal{D}_n$ noch eine weitere invariante Diffgl. niedrigerer als $(n+1)$-ter O. vorhanden. Es muß daher sein

$$\Delta_n = y^{(\lambda)h_n}\tilde{\Delta}_n, \tag{130}$$

und $\tilde{\Delta}_n$ ist *irreduzibel*, da $y^{(n)}$ in Δ_n nur *linear* auftritt. Nach (129) haben wir demnach den Satz

Satz 15. *Die invariante $\mathcal{D}_n$ der $\mathcal{G}_{n+1}$ (88) ist durch*

$$\tilde{\Delta}_n = 0 \tag{131}$$

gegeben; $\tilde{\Delta}_n$ ist ein in $y^{(n)}$ lineares Polynom von $y', \dots, y^{(n)}$, dessen Koeffizienten ganz rational aus den Koeffizienten von (88) *und ihren Derivierten zusammengesetzt sind.*

Nach Satz 5 muß es umgekehrt möglich sein, die Koeffizienten von (88) durch die Koeffizienten von (131) auszudrücken, *wodurch sich aus den charakteristischen Koeffizienten-Relationen zu* (88) *die charakteristischen Relationen für die Koeffizienten der Diffgl.* (131) *gewinnen lassen.*

Die Form (131) der $\mathcal{D}_n$ wird unbrauchbar, wenn auch das System (88) wegen $\lambda = \infty$ unbrauchbar wird. In diesem Falle müssen wir nach der Anweisung der Sätze 10 und 11 zu dem äquivalenten System von Defgl.n

$$\text{(a)} \quad \eta = -\,\bar{\lambda}\xi, \quad \xi^{\bar{\lambda}\bar{\lambda}} = (\bar{\varphi}\,\xi)^{\bar{\lambda}}, \quad \xi^{\bar{\lambda}}{}_y = (\bar{\varphi}\xi)_y,$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\partial^n \xi}{\partial y^n} = \bar{\alpha}_{n-1}\frac{\partial^{n-1}\xi}{\partial y^{n-1}} + \dots + \bar{\alpha}_1\xi_y + \bar{\alpha}_0\xi + \bar{\beta}\xi^{\bar{\lambda}} \tag{132}$$

übergehen. Die Gruppe (132) erweitern wir durch Mitnahme von $x', \dots, x^{(n)}$ und bilden die zu $\tilde{\Delta}_n$ analoge Größe $\bar{\tilde{\Delta}}_n$, die aus $\tilde{\Delta}_n$ durch die Substitution $\mathfrak{S}$ im Verein mit der Substitution

$$(y'x')\,(y''x'')\cdots(y^{(n)}x^{(n)}) \tag{133}$$

hervorgeht. *Dann ist*

$$\bar{\tilde{\Delta}}_n = 0 \tag{134}$$

wieder die zur Gruppe (88) *oder* (132) *gehörige $\mathcal{D}_n$, die sich von* (131) *dadurch unterscheidet, daß x als von y abhängig aufgefaßt ist.* Wollen wir dieses Abhängigkeitsverhältnis wieder

umdrehen, dann brauchen wir die $x', \ldots, x^{(n)}$ in $\bar{\Delta}_n$ nur zu ersetzen durch die Ausdrücke

$$(135) \qquad x' = \frac{1}{y'}, \quad x'' = -\frac{y''}{y'^3}, \quad x^{(i)} = K_i(y', y'', \ldots, y^{(i)}) \qquad (i = 3, 4, \ldots),$$

$$(135') \qquad x^{(i+1)} = \frac{dx^{(i)}}{dy} = \frac{dK_i}{dy} = \frac{dK_i}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} \frac{dK_i}{dx} = K_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Demnach ist der Satz 15 durch den folgenden zu ergänzen

Satz 16. *Die invariante $\mathcal{D}_n$ der durch das System* (132) *definierten $\mathcal{G}_{n+1}$ wird dargestellt durch*

$$(136) \qquad (\bar{\Delta}_n)_{x^{(i)} = K_i(y', \ldots, y^{(i)})} = 0;$$

in dieser Diffgl. läßt sich ohne weiteres der Grenzübergang $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = 0$ vollziehen.

§ 3. Die gewöhnlichen Diffgl.n 3. O., die durch P. T. lineare homogene Form erhalten können.

1. Die bis hierher entwickelte Theorie wenden wir jetzt praktisch an auf den Fall $n = 3$. Zwar wäre es im Rahmen unserer Theorie ohne weiteres möglich, unter Heranziehung von Satz 6 auch die Diffgl.n zu charakterisieren, welche durch P. T. in $y'' = 0$ übergeführt werden können; wir unterlassen dies jedoch, da eine solche Behandlung nicht die naturgemäße für dieses spezielle Problem ist [24]) und zu relativ weitläufigen Rechnungen führt.

Das System (88) schreiben wir für $n = 3$ in der Form

$$(137) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \text{(a)} & \xi = -\lambda\eta, \quad \eta_{\lambda\lambda} = \varphi\eta_\lambda + \varphi_\lambda\eta, \quad \eta_{\lambda x} = \varphi\eta_x + \varphi_x\eta, \\ \text{(b)} & \eta_{xxx} = 3\alpha\eta_{xx} + \beta\eta_\lambda + \gamma\eta_x + \delta\eta. \end{array}}$$

Die nach Satz 12 zu berechnenden Int. Bed.n lauten:

$$(138) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \text{(a)} & \alpha_\lambda = \lambda_x\alpha + \varphi_x + \lambda_{xx}, \\ \text{(b)} & \delta + \beta_\lambda - 3\lambda_x\beta = 0, \\ \text{(c)} & \gamma_\lambda = 2\lambda_x\gamma - 3(2\varphi_x + \lambda_{xx})\alpha + 3\varphi_{xx} + \lambda_{xxx}, \\ \text{(d)} & \delta_\lambda = (\varphi + 3\lambda_x)\delta - \varphi_x\gamma - \varphi_\lambda\beta - 3\varphi_{xx}\alpha + \varphi_{xxx}. \end{array}}$$

Das System (109) nimmt dann für $n = 3$ die Gestalt an

$$(139) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \text{(a)} & \xi_\lambda = -\lambda\eta_\lambda - \lambda_x\xi - (\lambda_\lambda + \lambda\lambda_x)\eta, \quad \xi_x = -\lambda\eta_x + \nu\xi + (-\lambda_x + \lambda\nu)\eta, \\ \text{(b)} & \eta_{\lambda\lambda} = \varphi\eta_\lambda + \varphi_x\xi + (\varphi_\lambda + \lambda\varphi_x)\eta, \quad \eta_{\lambda x} = \varphi\eta_x + \mu\xi + (\varphi_x + \lambda\mu)\eta, \\ \text{(c)} & \eta_{xxx} = 3\alpha\eta_{xx} + \beta\eta_\lambda + \gamma\eta_x + \vartheta\xi + (\delta + \lambda\vartheta)\eta. \end{array}}$$

Die Derivierte der Gruppen (137) und (139) besitzt die Defgl.n

$$(140) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \text{(a)} & \xi = -\lambda\eta, \quad \eta_\lambda = \varphi\eta, \\ \text{(b)} & \eta_{xxx} = 3\alpha\eta_{xx} + \gamma\eta_x + (\delta + \varphi\beta)\eta. \end{array}}$$

Gemäß Satz 13 finden wir die folgenden Relationen

$$(141) \qquad \boxed{\text{(a)} \quad \vartheta = -(3\beta\nu + \beta_x), \qquad \text{(b)} \quad \mu = \nu^{[1]} + \alpha^{[1]} \equiv \nu_x + \nu^2 + \alpha\nu + \alpha_x;}$$

$$(142) \qquad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \nu^{[2]} - 3\mu^{[1]} + 3\alpha(2\mu - \nu^{[1]}) + 2\gamma\nu + \gamma_x = 0 \\ \text{(b)} & \mu^{[2]} - 3\alpha\mu^{[1]} - \gamma\mu - 3(\delta + \varphi\beta)\nu - \delta_x - (\varphi\beta)_x = 0. \end{array}$$

[24]) Darüber vgl. W. Neumer, Die allgemeinste mit der proj. G_8 der Ebene ähnliche Gr. von Berührungstrf.n, Journal f. d. r. u. a. Mathematik **173** (1935), Formel (72).

Vermöge (141b) erhalten wir aus (142) mit Benutzung von (118′) die beiden Beziehungen

$$(143)\qquad \boxed{\begin{array}{ll}(a) & v^{[2]} \equiv v_{xx} + 3vv_x + v^3 = \psi v + \tfrac{1}{2}\psi_x,\\ (a') & \psi = \gamma + 3(\alpha^2 - \alpha_x),\\ (b) & 3\omega v + \omega_x = 0,\\ (b') & \omega = \delta + \varphi\beta - \tfrac{1}{2}\psi_x + \alpha(\gamma + 2\alpha^2) - \alpha_{xx}.\end{array}}$$

Diskutieren wir im Hinblick auf Satz 14 die Relationen (10θ), (108) und (141), (143) — *wobei übrigens zu bemerken ist, daß* (108) *eine Folge von* (141 b) *und* (138 a) *darstellt* —, so sehen wir, daß es darauf ankommt, wie viele Größen v aus (100) und (143) bestimmt werden können. Wenn $\omega = 0$ wird, bleiben zur Berechnung von v nur die beiden Diffgl.n (100), (143 a). Demnach ist deren Integrabilität zu prüfen, was — wie man sich leicht überlegt — durch Einsetzen von v an Stelle von f in (92′) für $m = 2$ erfolgt. Diese Integrabilität ist aber gesichert, und zwar vermöge der Beziehung

$$(144)\qquad \boxed{\psi_\lambda = 2(\lambda_x\psi - \lambda_{xxx}),}$$

die sich aus (138 a, c) ergibt. Die Diff.gl.n (100) + (143 a) besitzen daher stets ∞^2 Lösungen v, so daß nach Satz 14 im Falle $\omega = 0$ das System (137) eine $\mathcal{G}^{\mathrm{III}}_{3+1}$ definiert. Ist dagegen $\omega \neq 0$, so kann (143 b) nach v aufgelöst werden:

$$(145)\qquad \boxed{v = -\frac{\omega_x}{3\omega}.}$$

Einsetzen dieses Wertes von v in (143 a) liefert eine neue Relation für λ, φ, α, β, γ, δ, während (100) vermöge der Relation

$$(146)\qquad \boxed{\omega_\lambda - 3\lambda_x\,\omega = 0,}$$

die eine Folge von (138) ist, von selbst erfüllt wird. Übrigens kann die Relation (146) als eine andere Fassung von (138 d) angesehen werden. Auf Grund von Satz 14 können wir somit das Theorem aussprechen:

Theorem 1. *Durch das System* (137) *mit den Relationen* (138) — *von denen* (138 d) *durch* (146) *ersetzt werden kann — ist die allgemeinste* $\mathcal{G}_{3+1}$ *charakterisiert; wenn* $\omega = 0$, *so liegt eine* $\mathcal{G}^{\mathrm{III}}_{3+1}$ *vor, während im Falle* $\omega \neq 0$ *eine* $\mathcal{G}^{\mathrm{II}}_{3+1}$ *oder* $\mathcal{G}^{\mathrm{I}}_{3+1}$ *definiert wird, je nachdem* (143 a) + (145) *erfüllt ist oder nicht.*

2. Wenden wir uns jetzt zur invarianten $\mathcal{D}_3$ der $\mathcal{G}_{3+1}$ (137); die Determinante (128′) wird für $n = 3$

$$(147)\qquad \Delta_3 = \mathsf{H}_2''(y^{(\lambda)}\mathsf{H}''' - y'\mathsf{H}_1''') + \mathsf{H}_2'''(y'\mathsf{H}_1'' - y^{(\lambda)}\mathsf{H}''),$$

und dieser Ausdruck ist jetzt auszurechnen. Wegen $\xi = -\lambda\eta$ lautet (9′):

$$(148)\qquad \eta^{(i+1)} = \frac{d\eta^{(i)}}{dx} + \frac{d(\lambda\eta)}{dx}\,y^{(i+1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

und daraus finden wir

$$(148')\qquad \begin{cases}\mathsf{H}_2'' = y^{(\lambda)3}, \quad \mathsf{H}_1'' = y^{(\lambda)}\{3\lambda y'' + 2(\varphi + 2\lambda_x)y^{(\lambda)}y' + 3\lambda_\lambda y'^2\},\\ \mathsf{H}'' = (1 + 3\lambda y')y'' + (\varphi + 2\lambda_x)y^{(\lambda)}y'^2 + 2\lambda_\lambda y'^3\end{cases}$$

$$(148'')\qquad \begin{cases}\mathsf{H}_2''' = 3y^{(\lambda)2}\{2\lambda y'' + 2\lambda_\lambda y'^2 + (\varphi + 3\lambda_x)y^{(\lambda)}y' + \alpha y^{(\lambda)2}\},\\ \mathsf{H}''' = \beta y^{(\lambda)4} + \varphi y'\mathsf{H}'' + y'\mathsf{H}_0'' + \dfrac{d\mathsf{H}''}{dx} + \lambda y'y''',\\ \mathsf{H}_1''' = y^{(\lambda)3}((2\varphi_x + \lambda_{xx})y' + \gamma y^{(\lambda)}) + \varphi y^{(\lambda)}\mathsf{H}'' + (\varphi + \lambda_x)y'\mathsf{H}_1''\\ \qquad\qquad + y^{(\lambda)}\mathsf{H}_0'' + \dfrac{d\mathsf{H}_1''}{dx} + \lambda y^{(\lambda)}y'''.\end{cases}$$

Durch Einsetzen der Werte (148′), (148″) in (147) gelangen wir, wenn wir die Abkürzung

$$\chi = \varphi + 3\lambda_x \tag{149}$$

verwenden, nach Abspaltung des Faktors $y^{(\lambda)3}$ zu der gesuchten $\mathfrak{D}_3$:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_3 = {} & (1+\lambda y')y''' - 3\lambda y''^2 - 3\,(2\lambda_\lambda y'^2 + \chi y^{(\lambda)}y' + \alpha y^{(\lambda)2})y'' \\ & + 3\lambda_\lambda^2 y'^5 + (-\lambda_{\lambda\lambda} + 3\lambda_\lambda\chi)\,y^{(\lambda)}y'^4 + (3\lambda_\lambda\alpha - \chi_\lambda + \chi^2)\,y^{(\lambda)2}y'^3 \\ & + 3((\chi-\lambda_x)\alpha - \chi_x + 2\lambda_{xx})\,y^{(\lambda)3}y'^2 - \gamma y^{(\lambda)4}y' + \beta y^{(\lambda)5} = 0\,.\end{aligned} \tag{150}$$

Die Darstellung (150) der Größe $\tilde{\Delta}_3$ ist *eindeutig*, denn ein homogenes Polynom $\sum_{i=0}^{m} k_i(x,y)\,y^{(\lambda)i}y'^{m-i}$ verschwindet nur dann identisch, wenn sämtliche $k_i = 0$ sind. Die Diffgl. (150) bestimmt umgekehrt auch das System (137), denn aus (150) und (149) entnimmt man die Koeffizienten λ, φ, α, γ, β, womit wegen (138 b) auch δ bekannt ist.

Die Diffgl. (150) formen wir jetzt nach Anweisung von Satz 16 um, und zwar setzen wir sogleich $\bar{\lambda} = 0$, wodurch wir bekommen

$$\bar{\tilde{\Delta}}_3 = x''' - 3(\bar{\varphi}x' + \bar{\alpha})\,x'' + (-\bar{\varphi}_x + \bar{\varphi}^2)\,x'^3 + 3(\bar{\varphi}\bar{\alpha} - \bar{\varphi}_y)\,x'^2 - \bar{\gamma}x' + \bar{\beta} = 0; \tag{151}$$

bei Substitution der Ausdrücke (135), wo $x''' = -\dfrac{y'''}{y'^4} + \dfrac{3y''^2}{y'^5}$, in (151), stellt sich nach Multiplikation mit y'^5 die Diffgl. ein

$$\begin{aligned}& y'y''' - 3y''^2 - 3\,(\bar{\alpha}y'^2 + \bar{\varphi}y')\,y'' - \bar{\beta}y'^5 + \bar{\gamma}y'^4 \\ & + 3(\bar{\varphi}_y - \bar{\varphi}\bar{\alpha})\,y'^3 + (\bar{\varphi}_x - \bar{\varphi}^2)\,y'^2 = 0.\end{aligned} \tag{152}$$

Die Relationen zwischen $\bar{\varphi}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ erhalten wir durch Ausübung der Substitution $\mathfrak{S}$ auf (138), (143), (145), (146), indem wir zugleich $\bar{\lambda} = 0$ setzen:

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad \bar{\alpha}_x = \bar{\varphi}_y, \qquad \text{(b)}\quad \bar{\delta} + \bar{\beta}_x = 0, \qquad \text{(c)}\quad \bar{\gamma}_x = -6\bar{\varphi}_y\bar{\alpha} + 3\bar{\varphi}_{yy}, \\ &\text{(d)}\quad \bar{\delta}_x = \bar{\varphi}\bar{\delta} - \bar{\varphi}_y\bar{\gamma} - \bar{\varphi}_x\bar{\beta} - 3\bar{\varphi}_{yy}\bar{\alpha} + \bar{\varphi}_{yyy}\,.\end{aligned} \tag{153}$$

Die Relation (153 d) ist äquivalent mit

$$\bar{\omega}_x = 0\,, \tag{154}$$

$$\text{(a)}\quad \bar{\omega} = \bar{\delta} + \bar{\varphi}\bar{\beta} - \tfrac{1}{2}\bar{\psi}_y + \bar{\alpha}(\bar{\gamma} + 2\bar{\alpha}^2) - \bar{\alpha}_{yy}, \qquad \text{(b)}\quad \bar{\psi} = \bar{\gamma} + 3(\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}_y). \tag{154′}$$

Endlich tritt noch die Relation hinzu

$$\bar{\nu}_{yy} + 3\bar{\nu}\bar{\nu}_y + \bar{\nu}^3 = \bar{\psi}\bar{\nu} + \frac{1}{2}\bar{\psi}_y\,, \qquad \bar{\nu} = -\frac{\bar{\omega}_y}{3\bar{\omega}}\,. \tag{155}$$

Auf Grund von Theorem 1 bietet sich nun ohne weiteres im Zusammenhang mit Satz 8 das Theorem dar:

Theorem 2. *Die allgemeinste gewöhnliche Diffgl. 3. O., welche durch P. T. lineare homogene Form annehmen kann, besitzt die Gestalt* (150) *oder — für* $\lambda = \infty$ *— die Gestalt* (152), *wo die Größen* λ, χ, α, β, γ *bzgl.* $\bar{\varphi}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ *den Relationen* (149), (138 a—c), (146) *bzgl.* (153 a—c), (154) *genügen. Soll die Diffgl.* (150) *bez.* (152) *in lineare homogene Form mit konstanten Koeffizienten übergehen können, so muß noch die Relation* (143 a) + (145) *bez.* (155) *erfüllt sein; wenn endlich* $\omega = 0$ *bez.* $\bar{\omega} = 0$, *dann lassen sich die Diffgl.n* (150) *bzgl.* (152) *in* $y''' = 0$ *transformieren.*

Eingegangen 22. August 1936.

Über einige neuere Beispiele zur Wertverteilungslehre.

Von *Hermann Schmidt* in Jena.

Die Integralquotienten einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung der Form $y'' + Q(z)y = 0$ ($Q(z)$ Polynom) sind durch Herrn R. Nevanlinna [1]) systematisch vom Standpunkt der Theorie der gebrochenen Funktionen aus untersucht worden; hierbei ergeben sich naturgemäß mancherlei Beziehungen zu speziellen Funktionen, die von der Differentialgleichung her schon früher eingehend behandelt worden sind [2]). In den folgenden Zeilen soll nun auf einige solche Beziehungen aufmerksam gemacht werden, die anscheinend bisher nicht bemerkt wurden. Dies dürfte an sich von Interesse sein, überdies gestattet die Herübernahme bekannter Ergebnisse auch für die Behandlung im Sinne der neueren Theorie mitunter merkliche Abkürzungen der Rechnung.

1. Die Differentialgleichung $y'' - q^2 z^{q-2} y = 0$ [3]) (q ganz, $\geqq 2$) geht vermöge $u = z^{-\frac{1}{2}} y$; $x = 2i\, z^{\frac{q}{2}}$ in die Besselsche Gleichung

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \alpha^2)\, u = 0$$

vom Parameter $\alpha = \dfrac{1}{q}$ über. Für die von Herrn Nevanlinna eingeführten ganzen Funktionen [4]) $A(z)$, $B(z)$ ergibt sich daraus unmittelbar

$$A(z) = e^{-\frac{\pi i}{2q}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{q}\right) z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{q}}\left(2iz^{\frac{q}{2}}\right) = z + \cdots,$$

$$B(z) = e^{\frac{\pi i}{2q}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{q}\right) z^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{q}}\left(2iz^{\frac{q}{2}}\right) = 1 + \cdots,$$

wenn $J_\alpha(x)$ die Besselsche Funktion 1. Art vom Parameter α bedeutet. Die asymptotischen Eigenschaften von $f(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$ ergeben sich dann besonders bequem aus den bekannten asymptotischen Entwicklungen der Besselfunktionen.

2. Herr H. Wagner [5]) integriert die Differentialgleichung

(1) $$g''(z) - (z^{2n-2} + cz^{n-2}) g(z) = 0 \qquad (n \geqq 2 \text{ ganz}, \; c \text{ beliebig})$$

[1]) R. Nevanlinna, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, Acta Math. **58** (1932), S. 295—373, insbes. § 9.

[2]) Beispiel: Die Funktionen des parabolischen Zylinders; vgl. a. a. O. [1]), S. 361 ff.

[3]) R. Nevanlinna, Über die Herstellung transzendenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen, Acta Math. **55** (1930), S. 259—276, Gleichung (13).

[4]) A. a. O. [3]), Gleichung (12).

[5]) H. Wagner, Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten, dieses Journal **175** (1936), S. 6—49.

und die daraus vermöge $x = \frac{2}{n} z^n$, $h(x) = g(z)$ hervorgehende Differentialgleichung

$$xh''(x) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) h'(x) - \left(\frac{x}{4} + \frac{c}{2n}\right) h(x) = 0 \tag{2}$$

vermittels Laplacescher Transformation.

Vermöge $h = e^{-\frac{x}{2}} y$ geht nun (2) über in die Kummersche Differentialgleichung

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \beta y = 0 \text{ [6]} \tag{3}$$

mit den Parametern

$$\beta = \frac{n - 1 + c}{2n}, \quad \gamma = \frac{n - 1}{n}.$$

Das kanonische Fundamentalsystem am Nullpunkt ist

$$\begin{aligned} \mathring{y}_1 &= {}_1F_1(\beta, \gamma, x) = 1 + \cdots, \\ \mathring{y}_2 &= x^{1-\gamma} {}_1F_1(\beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}} (z + \cdots), \end{aligned} \tag{4}$$

wenn wir, wie üblich, mit

$${}_1F_1(\beta, \gamma, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta, \nu)}{(\gamma, \nu)} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

die Kummersche Reihe bezeichnen. Ferner gibt es zwei linear unabhängige Lösungen $\overset{x}{y}_1$, $\overset{\infty}{y}_2$, die für $x \to \infty$ in $-\frac{3\pi}{2} + \delta \leqq \arc x \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$ die asymptotischen Darstellungen gestatten:

$$\overset{\infty}{y}_1 \sim x^{-\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\beta, \nu)(\beta - \gamma + 1, \nu) \frac{(-x)^{-\nu}}{\nu!}, \tag{5}_1$$

$$\overset{\infty}{y}_2 \sim e^x x^{\beta-\gamma} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\gamma - \beta, \nu)\,(1 - \beta, \nu) \frac{x^{-\nu}}{\nu!} \text{ [7]}. \tag{5}_2$$

Es bestehen die Relationen

$$\begin{aligned} \mathring{y}_1 &= e^{-\pi i\beta} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \beta)} \overset{\infty}{y}_1 + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} \overset{\infty}{y}_2, \\ \mathring{y}_2 &= e^{-\pi i(\beta-\gamma+1)} \frac{\Gamma(2 - \gamma)}{\Gamma(1 - \beta)} \overset{\infty}{y}_1 + \frac{\Gamma(2 - \gamma)}{\Gamma(\beta - \gamma + 1)} \overset{\infty}{y}_2 \text{ [8]}. \end{aligned} \tag{6}$$

Für $x \to \infty$ in einem inneren Teilsektor der rechten (linken) Halbebene geht ersichtlich $\overset{x}{y}_1 : \overset{\infty}{y}_2$ $(\overset{\infty}{y}_2 : \overset{\infty}{y}_1)$ gegen Null. Daraus ist sofort das Hauptresultat von Herrn Wagner über die Lage der logarithmischen Windungspunkte [9]) abzulesen, noch mit der kleinen Erweiterung, daß $\gamma = 1 - \frac{m}{n}$ $((m, n) = 1, n \geqq 2)$ eine beliebige rationale, aber nicht

---

[6]) Vgl. hierzu insbesondere Kienast, Untersuchungen über die Differentialgleichung $xy'' + (\gamma - x)y' - \beta y = 0$, Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft **57** (1921), S. 247—325, im folgenden zitiert mit K. Dort ist auch ältere Literatur angegeben. Es könnten natürlich auch die expliziten Formeln für die gleichwertige Whittakersche Normierung benutzt werden, vgl. Whittaker-Watson, Modern Analysis, 4. Aufl. 1927, Kap. 16.

[7]) Vgl. K, S. 250/251. Man käme auch mit den dortigen, etwas beschränkteren Aussagen über das Gültigkeitsgebiet der Entwicklungen (5) aus.

[8]) K, S. 256, 17), 18), auch S. 287 unten.

[9]) A. a. O. [5]), S. 25.

ganze Zahl sein darf; die Funktion $w = \dfrac{\mathring{y}_2(z^n)}{\mathring{y}_1(z^n)}$ ist dann immer noch meromorph, nur erhält die Umkehrfunktion für $m \geqq 2$ noch eine algebraische Verzweigung über $w = 0$, für $m \leqq -2$ über $w = \infty$.

3. Aus $(5)_1$, $(5)_2$ ergibt sich ferner mit einem Schlag die Diskussion der Fälle, wo die Gleichung (1) eine Lösung der Form $D(z)e^{d(z)}$ besitzt ($D(z)$, $d(z)$ Polynome) [10]). Offenbar sind dies wegen des Eindeutigkeitssatzes für asymptotische Potenzreihen genau die Fälle, wo eine der Reihen (5) abbricht. Wir erhalten also unmittelbar die Tabelle

	$\beta = -k$	$\beta - \gamma + 1 = -k$	$\gamma - \beta = -k$	$1 - \beta = -k$
$c =$	$-(2k+1)n + 1$	$-(2k+1)n - 1$	$(2k+1)n - 1$	$(2k+1)n + 1$
$g(z) =$	$e^{-\frac{z^n}{n}} L_k\left(\frac{2}{n} z^n, -\frac{1}{n}\right)$	$e^{-\frac{z^n}{n}} z L_k\left(\frac{2}{n} z^n, \frac{1}{n}\right)$	$e^{\frac{z^n}{n}} L_k\left(-\frac{2}{n} z^n, -\frac{1}{n}\right)$	$e^{\frac{z^n}{n}} z L_k\left(-\frac{2}{n} z^n, \frac{1}{n}\right)$.

Hierbei ist $k \geqq 0$ ganz, beliebig, und es bedeutet

$$L_k(x, \alpha) = (-1)^k (\alpha + 1, k)\, {}_1F_1(-k, \alpha + 1, x) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

das Kummersche [11]) (= verallgemeinerte Laguerresche) Polynom vom Parameter α. Die erste Hälfte der letzten Zeile der Tabelle folgt aus (4), da die nach Eintragung der speziellen Parameterwerte abbrechende Reihe $(5)_1$, die jetzt im gewöhnlichen Sinne eine Lösung darstellt, mit derjenigen der Reihen (4) proportional sein muß, die gleichfalls abbricht, die zweite Hälfte dann durch Einsetzen der Parameterwerte in $(5)_2$ und Vergleich mit den soeben erhaltenen Ausdrücken.

[10]) A. a. O. [5]), S. 43—46 durch recht weitläufige Koeffizientenrechnungen. Nur für $n = 2$ wird nachträglich (S. 48/49) auf das Auftreten Hermitescher Polynome hingewiesen.

[11]) Zur Geschichte und Bezeichnungsweise vgl. z. B. W. Hahn, Bericht über die Nullstellen der Laguerreschen und der Hermiteschen Polynome, Jahresber. d. D. M. V. **44** (1934), S. 215—236, insbes. Einleitung und Schriftenverzeichnis.

Eingegangen 30. September 1936.

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 177

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1937